ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

გრიფი მიენიჭა ს.ს.ი.პ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ
(ბრძანება N 375, 18.05.2012).

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

სარჩევი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა.ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:

- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

- წყვილებში სამუშაო;

* - შედარებით რთული ამოცანა;

- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;

- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს, ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს, ათობითი ლოგარითმების და ტრიგონომეტრიული ფუნქციათა მნიშვნელობების ცხრილებს.

გისურვებთ წარმატებებს!

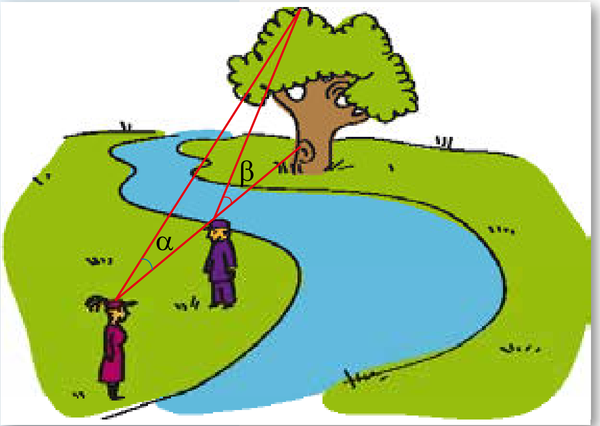
I თავი

ამ თავში თქვენ გაეცნობით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მათ თვისებებსა და გრაფიკებს. დამოკიდებულებებს ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ისწავლით ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებას და იგივეობათა დამტკიცებას. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას.

I
თავი

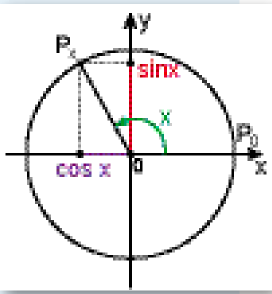
1 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები



თქვენთვის უკვე ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები.

გავიხსენოთ.

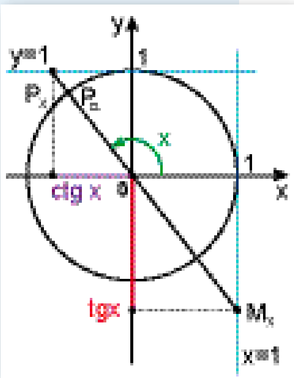
■ რას ეწოდება ტრიგონომეტრიული წრეწირი?



თუ P_x წერტილი მიიღება $P_0(1;\ 0)$ წერტილის O წერტილის მიმართ x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით, მაშინ ვიცით, რომ მიღებული P_x წერტილის ორდინატას x კუთხის **სინუსს**, აბსცისას კი x კუთხის **კოსინუსს** უწოდებენ. ხოლო OP_x წრფისა და x=1 (ტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა x კუთხის **ტანგენსია**, OP_x წრფისა და y=1 (კოტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა კი - x კუთხის **კოტანგენსი**.

შესაბამისად,

$x \to \sin x$, $y=\sin x$
$x \to \cos x$, $y=\cos x$
$x \to tgx$, $y=tgx$
$x \to ctgx$, $y=ctgx$



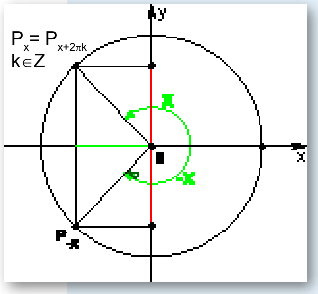
რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია.

ქვემოთ მოცემულია ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

ჩამოვაყალიბოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები.

1. y=sinx და y=cosx ფუნქციათა თვისებები



y = sinx ფუნქცია

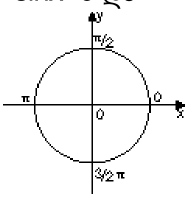
1. D(sin)=R

2. E(sin) = [–1; 1]

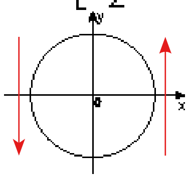
3. ∀x∈R: sin(–x) = –sinx
ფუნქცია კენტია - გრაფიკი სიმეტრიულია O (0,0) წერტილის მიმართ.

4. ∀x∈R: sin(x+2πn)=sinx, n∈Z
ფუნქცია პერიდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
x∈(2πn; π+2πn), n∈Z, sinx>0 და
x∈(π+2πn; 2π+2πn),
n∈Z, sinx<0



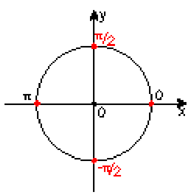
6. $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, n∈Z
ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.



$x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, n∈Z
ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.

7. ფუნქციის ნულებია:
sinx=0 ⇔ x=πn, n∈Z

8. სინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:
$\sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, n∈Z



ხოლო უმცირესს, როცა:
$\sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, n∈Z

y=cosx ფუნქცია

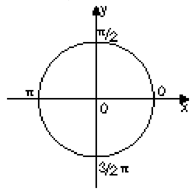
1. D(cos)=R

2. E(cos) = [–1; 1]

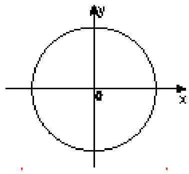
3. ∀x∈R : cos(–x) = cosx
ფუნქცია ლუწია – გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

4. ∀x∈R: cos(x+2πn)=cosx, n∈Z
ფუნქცია პერიოდულია.
უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$.

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, n∈Z, cosx>0
და
$x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3}{2}\pi+2\pi n\right)$,
n∈Z, cosx<0



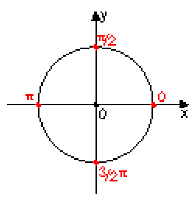
6. x∈(2πn; π+2πn), n∈Z
ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.



x∈(π+2πn; 2π+2πn), n∈Z
ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.

7. ფუნქციის ნულებია:
$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, n∈Z

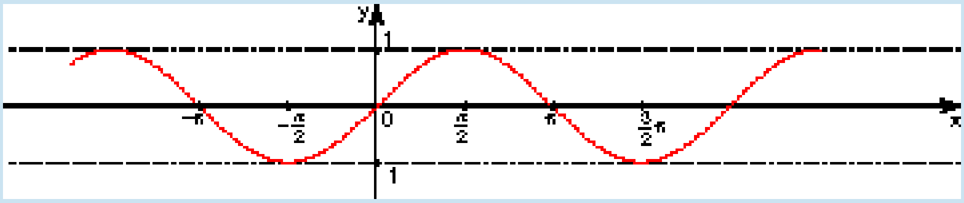
8. კოსინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:
cosx=1 ⇒ x=2πn, n∈Z



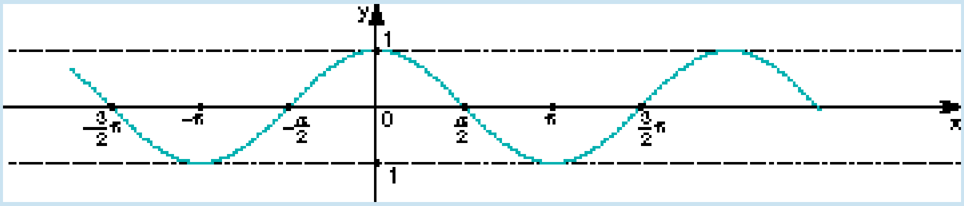
ხოლო უმცირესს, როცა:
cosx=–1 ⇒ x=π+2πn, n∈Z

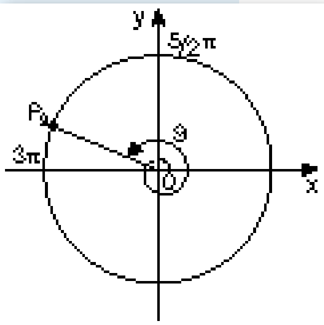
ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისებები.

y=sinx ფუნქციის გრაფიკი — სინუსოიდა.



y=cosx ფუნქციის გრაფიკი — კოსინუსოიდა.



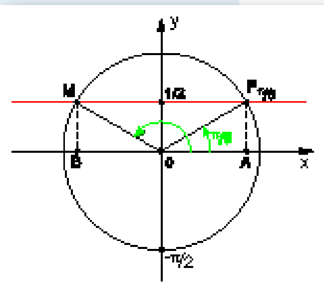


მაგალითი 1.

რომელი მეოთხედის კუთხეა 9 რადიანი?
ამოხსნა:

$\pi \approx 3{,}14 \qquad 3\pi > 9,$

$\frac{5}{2}\pi \approx 7{,}85$. ე.ი. 9 რადიანი მე-2 მეოთხედის კუთხეა.



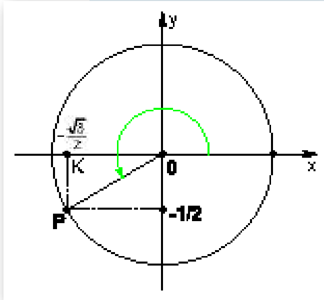
მაგალითი 2.

ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით იპოვეთ ყველა ის α კუთხე, რომელიც მოთავსებულია $[-4\pi;4\pi]$ შუალედში და რომელთათვისაც სრულდება $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

ამოხსნა:

გავავატაროთ $y=\frac{1}{2}$ წრფე. იგი წრეწირს ორ წერტილში გადაკვეთს. როგორც ცნობილია, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ე.ი. ერთ-ერთი ამ კუთხეთაგანი არის $\frac{\pi}{6}$. $\Delta OMB=\Delta OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle BOM = \angle OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle AOM = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ სინუსის პერიოდულობის გათვალისწინებით საძიებელი კუთხეები იქნებიან: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23}{6}\pi$, ასევე $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{17}{6}\pi$; $-\frac{7}{6}\pi$; $-\frac{19}{6}\pi$.

მაგალითი 3.



იპოვეთ ყველა ის რიცხვი, რომლის შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ წერტილი.

ამოხსნა:

ცხადია, P წერტილი ნამდვილად ტრიგონომეტრიული წრეწირის წერტილია, რადგან $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$. ΔPOK-ში $PK=\frac{1}{2}$; $OK=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $OP=1$. $\sin\angle KOP=\frac{1}{2}$, $\angle KOP=\frac{\pi}{6}$. ე.ი. P არის ყველა $\frac{7}{6}\pi+2\pi k$, $k\in Z$ რიცხვების და მხოლოდ მათი შესაბამისი წერტილი.

მაგალითი 4.

იპოვეთ $f(x)=\sin 3x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ T_o არის $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მაშინ უნდა შესრულდეს $f(x)=f(x+T_o)$.

$f(x+T_o)=\sin(3(x+T_o))=\sin(3x+3T_o)$ მივიღეთ:

$\sin 3x=\sin(3x+3T_o)$, რადგან $T_o(\sin)=2\pi$, ე.ი. $3T_o=2\pi \Rightarrow T_o=\frac{2}{3}\pi$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. თუ $0°<\alpha<90°$, მაშინ α კუთხე __?__ მეოთხედის კუთხეა.

2. თუ α არის II მეოთხედის კუთხე, მაშინ __?__ $< \alpha <$ __?__.

3. თუ $0°<\alpha<180°$, მაშინ α კუთხე __?__ ან __?__ მეოთხედის კუთხეა.

4. ჩასვით უტოლობის ნიშანი ისე, რომ გამოვიდეს ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა.

ა) $\cos\frac{r}{13}$ __?__ $\cos^2\frac{r}{13}$; ბ) $\sin\frac{r}{8}$ __?__ $\sin^2\frac{r}{8}$;

გ) $\sin\frac{r}{9}$ __?__ $\sin\frac{r}{9}\cos\frac{r}{7}$; დ) $\cos\frac{18r}{15}$ __?__ $\cos\frac{18r}{5}\sin\frac{11r}{3}$.

სავარჯიშოები:

1 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე წერტილის კოორდინატები, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha=$

ა) 3π; ბ) $\frac{3r}{2}$; გ) $-270°$; დ) $1080°$; ე) $-90°$; ვ) $-\frac{r}{4}$.

2 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე $P\alpha$ წერტილის კოორდინატები, თუ $OP\alpha$ სხივი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, სადაც α ტოლია:

ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}$; გ) $\frac{5\pi}{6}$; დ) π; ე) $\frac{7\pi}{6}$; ვ) $\frac{3\pi}{2}$;

ზ) $\frac{7\pi}{4}$; თ) $\frac{11\pi}{6}$; ი) $\frac{\pi}{3}$; კ) $-\frac{3\pi}{4}$; ლ) $-\pi$; მ) $-\frac{\pi}{2}$.

3 იპოვეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ

ა) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ და $-90°<x<90°$;

ბ) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $90°<x<270°$;

გ) $\cos x = -\frac{1}{2}$ და $360°<x<540°$;

დ) $\sin x = -\frac{1}{2}$ და $-270°<x<90°$.

4 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{4}+\cos(-\pi)-\sin\frac{\pi}{4}}$;

ბ) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\frac{\pi}{3}\,tg\frac{3\pi}{4}}{\left(ctg\frac{2\pi}{3}-tg\frac{\pi}{6}\right)^2}$;

გ) $2\sin\frac{\pi}{2}-\cos^2\frac{\pi}{4}+3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin^2\frac{\pi}{4}$;

დ) $-4\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+tg^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5 დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი მოცემული ფუნქცია

ა) $y=\sin 5x+\sin 3x+\sin x\cos 2x$; ბ) $y=\cos 4x+\sin^3\frac{x}{2}\sin x+5x^2$;

გ) $y=\sin|x|\cdot\cos 2x$; დ) $y=tgx\cdot\cos 2x+\sin x\cos 4x$.

6 დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი

ა) $y=2\sin x$; ბ) $y=\sin 2x$; გ) $y=\frac{\cos x}{2}$; დ) $y=\sin^2 x$;

ე) $y=\cos 3x$; ვ) $y=\sin x+\cos 2x$; ზ) $y=|\cos 2x|$; თ) $\sin\frac{x}{4}$.

7 ერთეულოვან წრეწირზე ორი A(0;1) და B(1;0) წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას ერთი და იმავე მიმართულებით. A წერტილი წუთში შემოწერს 60°-იან რკალს, ხოლო B წერტილი — 42°-იანს. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი:

ა) პირველი შეხვედრა? ბ) მეორე შეხვედრა? გ) k-ური შეხვედრა?

8 ერთეულოვან წრეწირზე ორი A(0;1) და B(1;0) წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით. A წერტილი მოძრაობს უარყოფითი მიმართულებით და ყოველ წუთში შემოწერს 20°-იან რკალს, ხოლო B წერტილი დადებითი მიმართულებით და ყოველ წუთში მის მიერ გავლილი რკალის გრადუსული ზომა 25°-ია. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი:
ა) პირველი შეხვედრა? ბ) მეორე შეხვედრა? გ) k-ური შეხვედრა?

9* აჩვენეთ, რომ თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, მაშინ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

10 ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

11 იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(g(x))=0$, თუ $f(x)=x^2-5x-6$ და $g(x)=x^2$.

12 იპოვეთ $\sqrt{(3-a)(5+a)}$, თუ $\sqrt{3-a}+\sqrt{5+a}=4$.

13 ამოხსენით სისტემა (მით.: გამოიყენეთ იგივეობა $[x]+\{x\}=x$).

$$\begin{cases} [x]+\{y\}=2{,}3 \\ [y]+\{x\}=1{,}2 \end{cases}.$$

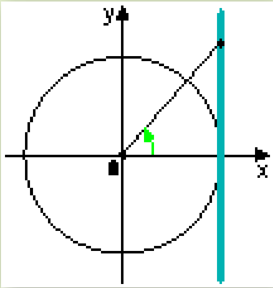
14 a-ს რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)=(a-2)x+3a-4$ ფუნქცია
ა) ლუწი; ბ) კენტი.

15 a-ს რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)=(a+3)x+5a$ ფუნქცია პერიოდული?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

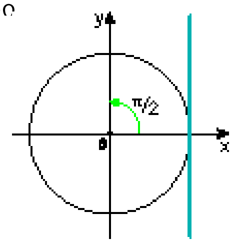
16 იპოვეთ ა) $y=\sin kx$; ბ) $y=\cos kx$ ფუნქციის პერიოდი, უმცირესი დადებითი პერიოდი.

2 y=tgx და y=ctgx ფუნქციათა თვისებები

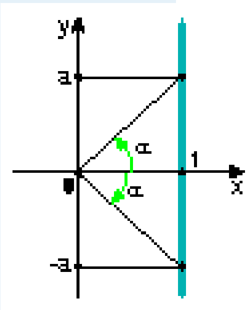


1. ააგეთ კუთხე, რომლის ტანგენსი (კოტანგენსი) ტოლია:
ა) 1-ის, ბ) 2-ის, გ) 3-ის.

ჩამოვაყალიბოთ y=tgx ფუნქციის ძირითადი თვისებები

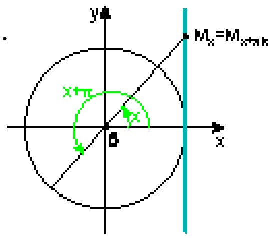


1. ტანგენსის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა.

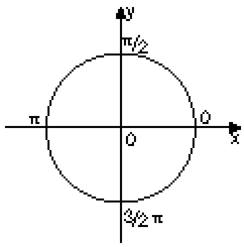


2. E(tg)=R

3. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(-x)=-tgx$, ე.ი. ფუნქცია კენტია.

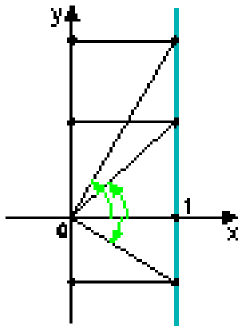


4. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(x+\pi k)=tgx,\ k\in Z$
ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π.



5. ტანგენსის ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x\in(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში $tgx>0$ და
$x\in(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში $tgx<0$.

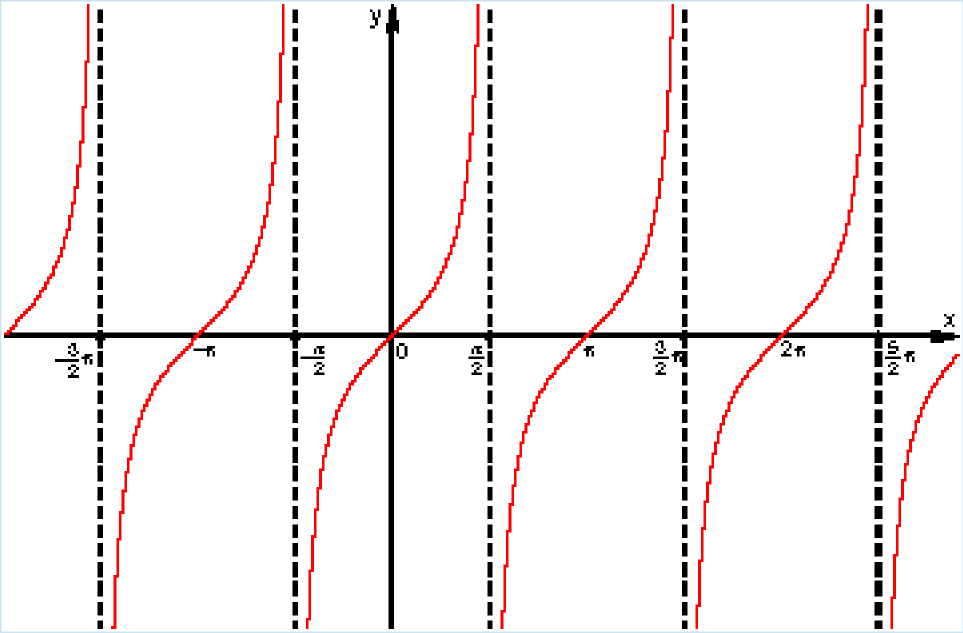
6. $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$ შუალედებში y=tgx ფუნქცია ზრდადია.



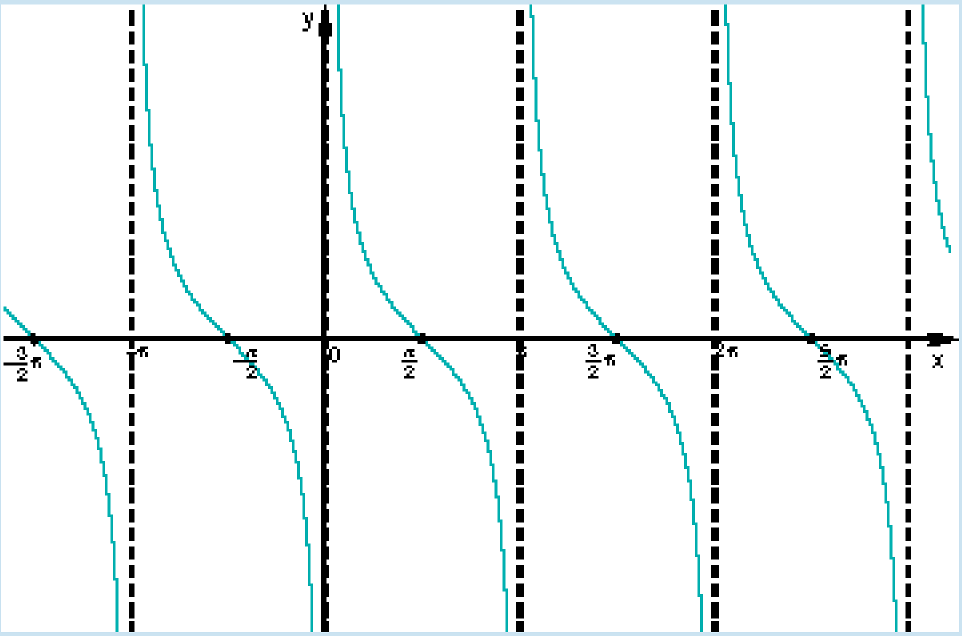
აჩვენეთ, რომ როცა x უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$-ს და $x<\frac{\pi}{2}$, tgx-ის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება - ხდება რაგინდ დიდი მაგრამ როცა x უახლოვდება $-\frac{\pi}{2}$-ს და $x>-\frac{\pi}{2}$, მაშინ $|tgx|$-ის მნიშვნელობები აბსოლუტური სიდიდით ისევ უსაზღვროდ იზრდება.

7. ტანგენსის ნულებია: თუ $tgx=0$, მაშინ $x=\pi k,\ k\in Z$.

y=tgx ფუნქციის გრაფიკი – ტანგენსოიდა



y=ctgx ფუნქციის გრაფიკი – კოტანგენსოიდა



ა) დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) y=tgx ფუნქციის თვისებები;

ბ) ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ y=ctgx ფუნქციის თვისებები.