ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 9

მოსწავლის წიგნი

გრიფი მიენიჭა ს.ს.ი.პ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ
(ბრძანება N 375, 18.05.2012).

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

სარჩევი

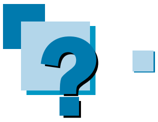
როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა.

ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:



- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

- წყვილებში სამუშაო;

* - შედარებით რთული ამოცანა;

- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;

- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს და ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს.

გისურვებთ წარმატებებს!

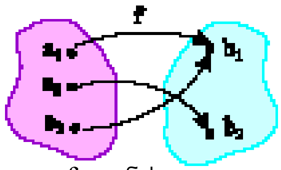
I თავი

ამ თავში გაიღრმავებთ ცოდნას ფუნქციის შესახებ. გაეცნობით $y=x^2$ ფუნქციას და მის გრაფიკს — პარაბოლას. შეისწავლით კვადრატულ განტოლებას და მის ამოხსნას, ვიეტას თეორემას.

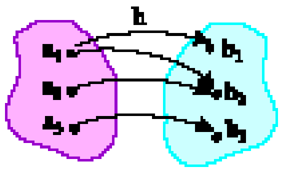
შეძლებთ ტექსტური ამოცანების ამოხსნას კვადრატული განტოლების მეშვეობით, ვიეტას თეორემის გამოყენებით განტოლების ფესვების პოვნას, კვადრატული სამწევრის დაშლას მამრავლებად.

1 ფუნქცია

> თეორია პრაქტიკის გარეშე ფანტაზიაა,
> პრაქტიკა თეორიის გარეშე — ქაოსი.
> მ. ავრელიუსი



f ფუნქციაა



h არ არის ფუნქციაა

ბუნებაში, ტექნიკასა და ეკონომიკაში სხვადასხვა მოვლენების შესწავლისას, ხშირად ცდების საშუალებით ვადგენთ ერთი სიდიდის მეორეზე დამოკიდებულებას. ხშირად კი ამ დამოკიდებულებების გამოსახვას ფორმულის საშულებითაც ვახერხებთ.
შევისწავლოთ ორ სიდიდეს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება.
ფუნქცია, მისი თვისებების შესწავლა და გრაფიკის აგება ხშირად გვეხმარება ბევრი ამოცანის ამოხსნაში, ზოგჯერ კი იგი ამოცანის ამოხსნის ერთადერთი „იარაღია“.
ვთქვათ, მოცემულია D და E არაცარიელი ორი რიცხვითი სიმრავლე.

ვთქვათ, X და Y რაიმე არაცარიელი სიმრავლეებია.
თუ X სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, ამბობენ, რომ მოცემულია ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში და წერენ
$f: X \to Y$.
ასახვა, ფუნქცია ერთმანეთის სინონიმებია.
$y = f(x)$ ელემენტს x ელემენტის **სახე** ეწოდება, ხოლო x ელემენტს, როცა $y = f(x)$, y ელემენტის **წინასახე** ეწოდება.

D და E სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა D სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს შეესაბამება E სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, ფუნქცია[1] ეწოდება.

ფუნქციის აღსანიშნავად ხშირად ლათინურ პატარა f, g, h, ... ასოებს ხმარობენ. ვიცით, რომ წინადადება — „f არის ფუნქცია D სიმრავლისა E-ში“ — მოკლედ ასე ჩაიწერება:

$$f:D\to E, \text{ ან კიდევ } — y=f(x),$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია — არგუმენტი, y — დამოკიდებული ცვლადი ანუ ფუნქცია, ხოლო f — წესი, რომლითაც x ელემენტს შეესაბამება y ელემენტი. სიმბოლო f(x) აღნიშნავს იმ y რიცხვს, რომელიც განსაზღვრის არიდან აღებულ x რიცხვს f წესის მიხედვით შეესაბამება. ე.ი. თუ $f: x \to 3x - 1$, მაშინ

$f(x) = 3x - 1,$
$f(1) = 3\cdot 1 - 1 = 2$
$f(4) = 3\cdot 4 - 1 = 11$
$f(a) = 3a - 1$

f წესით ნებისმიერ რიცხვს შეესაბამება გასამკეცებულ ამ რიცხვს გამოკლებული ერთი.

D სიმრავლეს, საიდანაც მნიშვნელობებს ღებულობს დამოუკიდებელი ცვლადი, **ფუნქციის განსაზღვრის არე** ეწოდება; ხოლო დამოკიდებული y ცვლადის მიერ მიღებული მნიშვნელობები **ფუნქციის მნიშვნელობათა E სიმრავლეს** ქმნის.

არის თუ არა ქვემოთ მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია? დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე:
ა) $x \to 2x - 5$, თუ $0 \le x \le 7$;

1) ასეთ შესაბამისობას სხვანაირად ასახვა ეწოდება.

ბ) $x \to \pm\sqrt{x}$;
გ) მართკუთხედის სიგრძე → მისივე ფართობი, თუ მართკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია;
დ) $x \to \frac{5}{x-1}$;
ე) მერიდიანი → ამ მერიდიანზე მდებარე ქალაქი.

ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის მოცემისას ცნობილი უნდა იყოს მისი განსაზღვრის არეც. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის განსაზღვრის არე ზოგჯერ შესაძლოა მოცემული ამოცანის პირობიდან განისაზღვროს, ზოგჯერ იგი ცხადადაა მითითებული, ზოგჯერ კი $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, მაგრამ არ არის მითითებული მისი განსაზღვრის არე. ასეთ შემთხვევაში $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არედ ჩაითვლება დამოუკიდებელი ცვლადის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს.

მაგალითად,

1. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია: $y=2x-5, 0\le x\le 7$. ცხადია, ამ შემთხვევაში $D(y) = [0;7]$.

2. დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც მართკუთხედის სიგრძეს შეუსაბამებს მის ფართობს, თუ ცნობილია, რომ მართკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია. ადვილი სანახავია, რომ ამ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:
$f : x \to -x^2 + 10x$,
ანუ $y = -x^2 + 10x$.

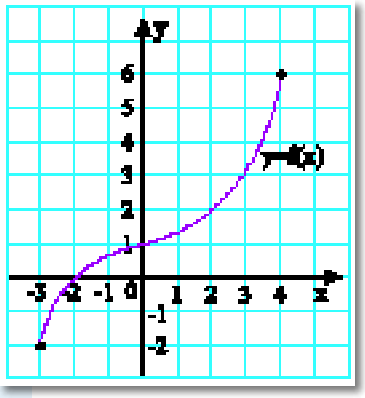
ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, $x>0$ და ამავე დროს $x<10$ (სიგრძისა და სიგანის ჯამი 10 სმ-ია). ე.ი. $D(y)=(0;10)$.

> $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე დამოუკიდებელი ცვლადის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეა, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს.

3. მოცემულია $y = \frac{5}{x-1}$ ფუნქცია. ასეთი სახით მოცემული ფუნქციის ბუნებრივი განსაზღვრის არე იქნება x-ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\frac{5}{x-1}$ გამოსახულებას აზრი აქვს. ე.ი. $x \neq 1$. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ: $x=1$ წერტილზე ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.
როგორც უკვე ვიცით, f ფუნქციის განსაზღვრის არე აღინიშნება $D(f)$ სიმბოლოთი. მნიშვნელობათა სიმრავლე კი – $E(f)$ სიმბოლოთი.

გავიხსენოთ, რომ **$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყის ყველა $(x;f(x))$ წერტილის სიმრავლეს**, ანუ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის სიბრტყის ყველა იმ $(x;y)$ წერტილის სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს $y=f(x)$ განტოლებას.

გრაფიკის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის და პირიქით, შეგვიძლია ვიპოვოთ არგუმენტის მნიშვნელობა, რომელსაც ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობა შეესაბამება.



ნახაზზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. აღწერეთ, როგორ ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $x=1$; 3,5 და, პირიქით, როგორ ვიპოვოთ x, თუ $f(x)=4$; 0; 1.

განვიხილოთ ამოცანა:
გააგორეს ორი, ლურჯი და წითელი კამათელი. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ლურჯ კამათელსა და წითელ კამათელზე მოსული რიცხვების სხვაობა ტოლი იქნება –2-ის, 1-ის. შეადგინეთ p შესაბამისობის ცხრილი, სადაც p: მოსულ რიცხვთა სხვაობა → ამ სხვაობის მოსვლის ალბათობა (იგულისხმება ლურჯ კამათელზე მოსულ რიცხვს გამოკლებული წითელ კამათელზე მოსული რიცხვი). ააგეთ p შესაბამისობის გრაფიკი. იქნება თუ არა ეს შესაბამისობა ფუნქცია?

გასახსენებლად!

$p(A)=\frac{m}{n}$,
სადაც m ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობაა, ხოლო n ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი.

ცხრილი 1

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	–1	0	1	2	3	4
⚂	–2	–1	0	1	2	3
⚃	–3	–2	–1	0	1	2
⚄	–4	–3	–2	–1	0	1
⚅	–5	–4	–3	–2	–1	0

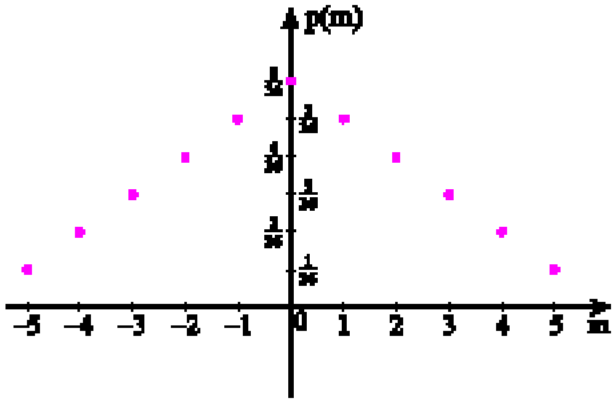
1-ლი ცხრილის საშუალებით შევადგინოთ p შესაბამისობის ცხრილი.

სხვაობა	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
ალბათობა	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$p: m \to \frac{6-|m|}{36}$, ანუ $p(m)=\frac{6-|m|}{36}$, $m \in \{-5; -4; -3; \ldots; 4; 5\}$

$p(-2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p(1)=\frac{5}{36}$.

p შესაბამისობა ფუნქციაა. ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.



ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(p)=\left\{\frac{1}{36};\ \frac{2}{36};\ \frac{3}{36};\ \frac{4}{36};\ \frac{5}{36};\ \frac{6}{36}\right\}$

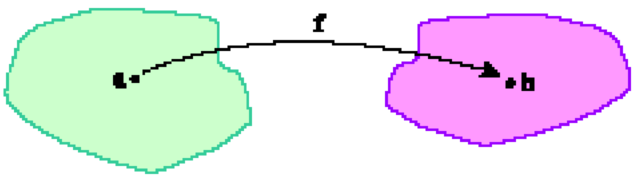
მიღებული გრაფიკიდან კიდევ სხვა თვისებების ამოკითხვაც შეგვიძლია.

- როგორ იცვლება მოსული რიცხვების სხვაობის ალბათობა, როცა m იზრდება: ა) –5-დან 0-მდე? ბ) 0-დან 5-მდე?
- როგორია m-ის და –m-ის მოსვლის ალბათობა?
- აქვს თუ არა p ფუნქციას სიმეტრიის ღერძი? სიმეტრიის ცენტრი?
- ჩამოაყალიბეთ არეზე მოცემული წინადადების საწინააღმდეგო წინადადება.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის _?_ ფუნქცია ეწოდება.

2.

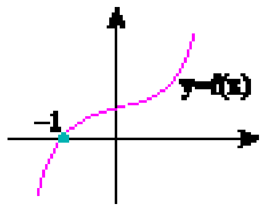


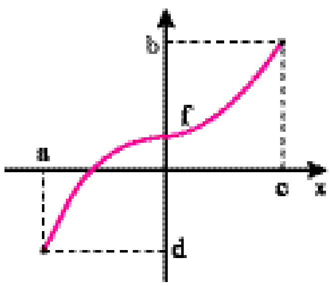
a ელემენტს b ელემენტის __?__ ეწოდება, b ელემენტს კი a ელემენტის __?__.

3. ჩასვით გამოტოვებულ ადგილას ნიშნები <; >; = ნახაზზე მოცემული y=f(x) ფუნქციისთვის:

f(–3) __?__ 0; f(2) __?__ 0;

f(3) __?__ f(–1); f(–1) __?__ 0.

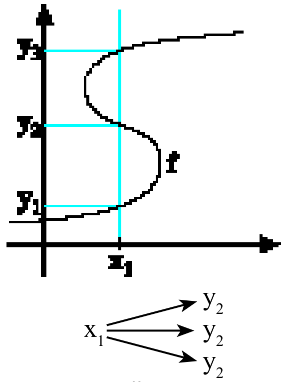




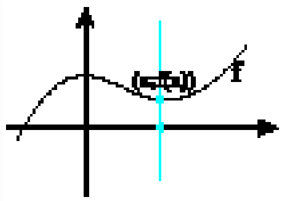
4. f ფუნქციისთვის D(f) = __?__; E(f) = __?__ .

5. მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს y=f(x) განტოლებას, y=f(x) ფუნქციის __?__ ეწოდება.

6. მოცემული $y=x^2-1$ ფუნქციისთვის, როცა არგუმენტის მნიშვნელობა უდრის 3-ს, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია __?__, ხოლო როცა ფუნქციის მნიშვნელობაა 3-ის ტოლი, მაშინ არგუმენტის მნიშვნელობა უდრის __?__.



f წირი
არ არის ფუნქცია



f – ფუნქციაა

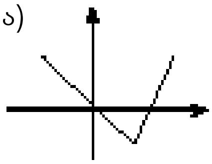
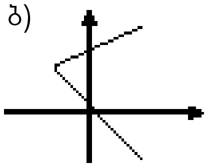
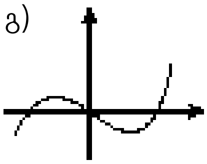
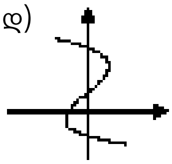
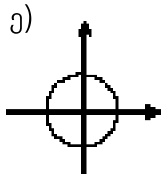
ყურადღება!

საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული წირი არის ფუნქცია, თუ y ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე წირს კვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში.

სავარჯიშოები:

1 რიცხვით სიმრავლეებს შორის დავამყაროთ შემდეგი შესაბამისობა:
ა) ყოველ რიცხვს შევუსაბამოთ ამ რიცხვის კვადრატი.
ბ) ყოველ არაუარყოფით რიცხვს შევუსაბამოთ ის რიცხვი, რომლის კვადრატიც მოცემული რიცხვია.
არის თუ არა განხილული შესაბამისობა ფუნქცია?

2 ნახაზზე მოცემული წირებიდან რომელია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი?

ა) 
ბ) 
გ) 
დ) 
ე) 

3 მოცემულია $f(x)=2x^2-3$ ფუნქცია. იპოვეთ: ა) $f(-2)$; $f(0)$; $f(1,5)$;
ბ) იპოვეთ x-ის ის მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც $f(x)=1$; $f(x)=-2$; $f(x)=5$.

4 არის თუ არა x და y ცვლადებს შორის ცხრილში მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?

ა)

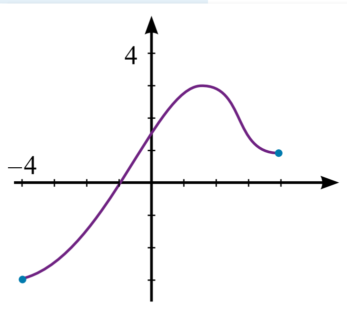
x	1	–1	1
y	3	2	1

ბ)

x	–2	–1	1
y	–7	–2	2

გ)

x	–2	–1	0	1
y	5	2	1	2



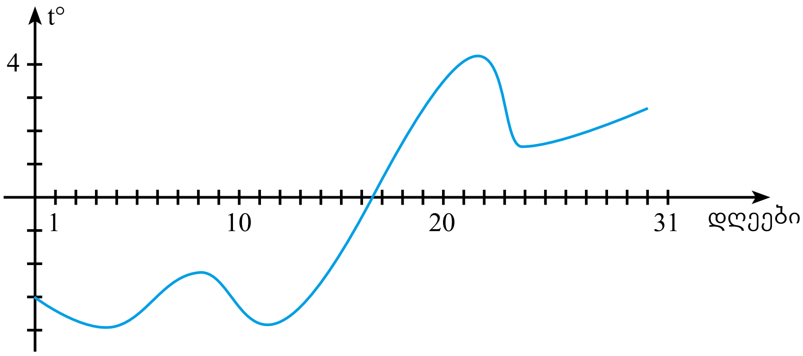
5 ნახაზზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი:
ა) დაწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე; მნიშვნელობათა არე;
ბ) შეადარეთ ერთმანეთს $f(-3)$ და $f(2)$;
გ) იპოვეთ შუალედები, სადაც $f(x)$ ღებულობს დადებით, უარყოფით მნიშვნელობებს.

6 ერთი ბურთი 8 ლარი ღირს. 1 თოჯინა — 12 ლარი. უნდა შეიძინონ სულ 15 სათამაშო. დაწერეთ ფუნქცია f : ბურთების რაოდენობა → გადახდილი თანხა. იპოვეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.

7 დაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქცია და იპოვეთ $f(4)$, $f(-3)$, $f(0)$, თუ x რიცხვს შეუსაბამეს:
ა) გასამკეცებულ ამ რიცხვს დამატებული ხუთი;
ბ) ამ რიცხვის მოდულს დამატებული ამ რიცხვის შებრუნებული რიცხვი;
გ) შებრუნებულ ამ რიცხვს დამატებული თვით ეს რიცხვი;
დ) ამ რიცხვს დამატებული მისი მოპირდაპირე რიცხვი.

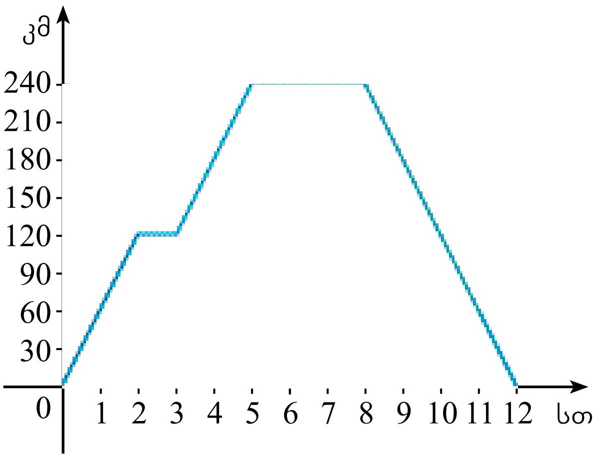
8 მდებარეობს თუ არა $y = x^2 - 5$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილები A(3;4); B(–7;40); C(–5;20); D(0;–5).

9 ნახაზზე მოცემულია იანვრის თვეში ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:



ა) იანვრის რომელ დღეებში იყო ტემპერატურა 0°-ზე ნაკლები? მეტი?
ბ) რისი ტოლი იყო ტემპერატურა 5 რიცხვში; 15 რიცხვში; 25 რიცხვში?
გ) იყო თუ არა ტემპერატურა იანვრის რომელიმე რიცხვში –6°; +6°; 0°. თუ იყო, რომელ რიცხვში?
დ) როდის იყო ტემპერატურა ყველაზე მაღალი, დაბალი? რამდენი გრადუსი იყო ტემპერატურა ამ დროს?
არის თუ არა მოცემული დამოკიდებულება ფუნქცია?

10. ტურისტთა ჯგუფი გაემგზავრა ისტორიული ძეგლის სანახავად. ნახაზზე მოცემულია ტურისტთა ჯგუფის საწყისი პუნქტიდან დაშორების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:



1) მოძრაობის დაწყებიდან რა მანძილზე იმყოფებოდნენ ტურისტები t სთ-ის შემდეგ, თუ t = 1; 1,5; 3; 9?

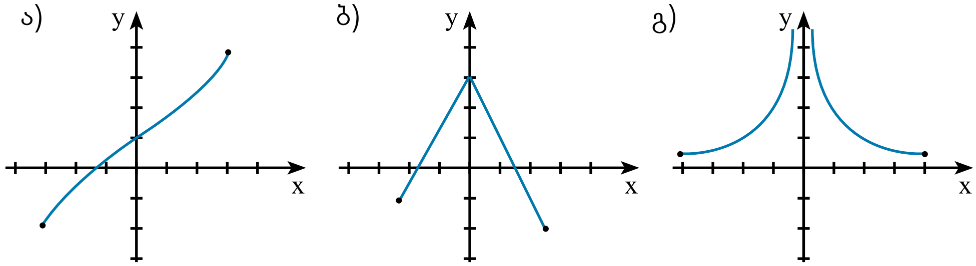
2) რომელ საათზე დაბრუნდნენ ტურისტები უკან, თუ ისინი გავიდნენ დილის 8სთ-ზე?

3) გასვლის ადგილიდან რა მანძილზე იმყოფებოდა ისტორიული ძეგლი და რამდენ საათს გაჩერდნენ ტურისტები იქ?

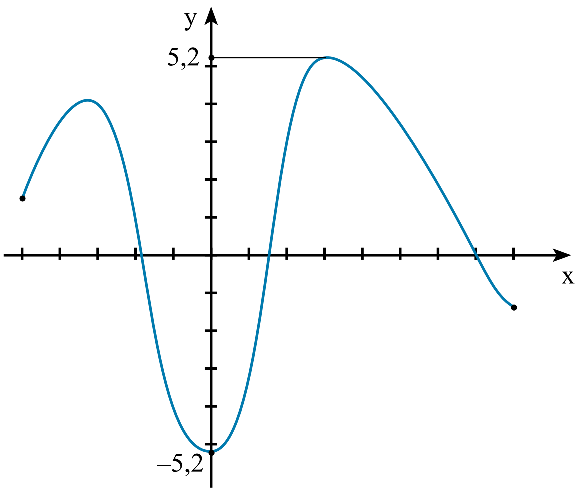
4) როდის მოაწყვეს ტურისტებმა შესვენება და რამდენი ხნით? რა იყო მათი სიჩქარე შესვენებამდე, შესვენების შემდეგ ისტორიულ ძეგლამდე და რა სიჩქარით მოძრაობდნენ ისინი უკან დაბრუნებისას?
5) რა იქნებოდა ტურისტების საშუალო სიჩქარე, მათ რომ ეს მანძილი შეუსვენებლად გაევლოთ?

11 თუ $f(x)=5x+3$, იპოვეთ $f(0)$; $f(1)$; $f(4)$ და $f(-3)$ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული.

12 ჩაწერეთ მოცემულ ფუნქციათა განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე:



13 ნახაზზე მოცემულია $[-5;8]$ შუალედზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია. რამდენ განსხვავებულ მთელ მნიშვნელობას ღებულობს ეს ფუნქცია?



14 მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის ერთი გვერდის სიგრძე მეორეზე 2 სმ-ით მეტია, ხოლო სიმაღლე ფუძის ორივე გვერდის ჯამის ტოლია. დაწერეთ პარალელეპიპედის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა და იანგარიშეთ მისი მნიშვნელობა, თუ პარალელეპიპედის სიმაღლე 14 სმ-ია.

15 თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მიერ გავლილი მანძილი გამოითვლება $S=\frac{gt^2}{2}$ ფორმულით. სხეული ვარდება H მ სიმაღლიდან. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

16 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y = 4x^2 - 7x + 1$; ბ) $y = \frac{3}{x+1}$; გ) $y = \frac{5}{x^2+4}$;

დ) $y = \sqrt{2x-3}$; ე) $y = \frac{1}{2|x|-3}$; ვ) $y = \frac{x+1}{x^2-4}$.

17 დაწერეთ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა:
ა) R; ბ) $[2;\infty)$; გ) $R\setminus\{1;-1\}$; დ) $R\setminus\{-3\}$.

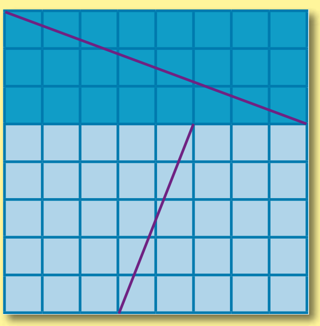
18 შეიძლება თუ არა 1 მ ფუძის მქონე სამკუთხედის ფართობი იყოს 10^6 მ^2-ის ტოლი? დაწერეთ ფუნქცია
f: სამკუთხედის სიმაღლე → სამკუთხედის ფართობი.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

1. შეადგინეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს წყლის თანაბარი გამოდინების შემთხვევაში წყლის მოცულობის დამოკიდებულებას დროზე.
   ხელსაწყოები: 10-ლიტრიანი დანაყოფებიანი ჭურჭელი (ბიჯით 0,1 ლ) და საათი.
2. შეადგინეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს ცილინდრის მოცულობის მისსავე სიმაღლეზე დამოკიდებულებას. ხელსაწყოები: რამდენიმე ცილინდრული ჭურჭელი (დანაყოფებიანი), სანტიმეტრი.

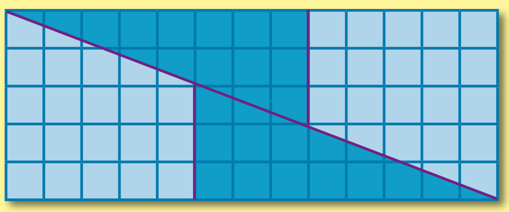
კვადრატი ზომით 8×8 დაჭრილია ნაწილებად ისე, როგორც ნახ. ა)-ზეა და მიღებული ნაწილებისაგან შედგენილია მართკუთხედი (ნახ. ბ).

$$\overset{?}{64 = 65}$$



S=8·8=64

ა)



S=5·13=65

ბ)