

ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია
ნინო გულუა
გიორგი ძაგანია

მათემატიკა 12

მასწავლებლის წიგნი



გაერ სულაპურის
გამომცემლობა

ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია
ნინო გულუა
გიორგი ძაგანია

მათემატიკა 12

მასწავლებლის წიგნი

ყდის დიზაინი: **მარტა თაბუკაშვილი, ნათია კვარაცხელია**
დაკაბადონება: **მაია ფეიქრიშვილი**

© ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა, 2012

პირველი გამოცემა, 2012

ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა
მისამართი: დავით აღმაშენებლის 150, თბილისი 0112
ტელ.: 291 09 54, 291 11 65
ელფოსტა: info@sulakauri.ge

www.sulakauri.ge

ISBN 978-9941-15-640-3

N. Jafaridze
M. Tsilosani
N. Tsulaia
N. Gulua
G. Dzaganian

MATH 12
Teacher's Book

© Bakur Sulakauri Publishing, 2012
Tbilisi, Georgia

ს ა რ ჩ ე ვ ი

<u>შესავალი</u>	5
<u>ეროვნული სასწავლო გეგმა</u>	6
<u>წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები</u>	7
<u>შინაარსისა და მიზნების რუკა</u>	10
<u>მოსწავლის შეფასების სისტემა</u>	12
<u>გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს</u>	15
<u>I თავი</u>	18
1. <u>მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი</u>	18
2. <u>პრიზმის ზედაპირის ფართობი</u>	19
3. <u>პირამიდის ზედაპირის ფართობი</u>	20
4. <u>მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა</u>	23
5. <u>კავალიერის პრინციპი</u>	25
6. <u>პირამიდის მოცულობა</u>	26
7. <u>ცილინდრის ზედაპირის ფართობი</u>	28
8. <u>კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი</u>	29
9. <u>ბირთვის ზედაპირის მოცულობა</u>	31
<u>II თავი</u>	32
1. <u>აღბათობის თეორიის ელემენტები</u>	32
2. <u>ბერნულის ფორმულა</u>	35
3. <u>სტატისტიკის ელემენტები</u>	36
4. <u>კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები</u>	36
<u>III თავი</u>	37
1. <u>რაციონალური რიცხვი</u>	37
2. <u>ირაციონალური რიცხვი</u>	39
3. <u>პროპორცია. პროცენტი</u>	40
4. <u>სიმრავლე</u>	42
5. <u>გრაფი</u>	43
6. <u>კენიგსბერგის ხიდების ამოცანა</u>	44
7. <u>ფუნქცია</u>	45
8. <u>განტოლება</u>	48
9. <u>განტოლებათა სისტემა</u>	49
10. <u>ამოცანები</u>	51
11. <u>უტოლობები</u>	59
12. <u>წრფივი დაპროგრამების ამოცანების გრაფიკული ამოხსნა</u>	62
13. <u>მიმდევრობა</u>	63

<u>IV თავი</u>	67
1. <u>საწყისი გეომეტრიული ცნებები</u>	67
2. <u>სამკუთხედები</u>	71
3. <u>წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წრეწირი. აგების ამოცანები</u>	76
4. <u>მრავალკუთხედები</u>	80
5. <u>მრავალკუთხედის ფართობი</u>	88
6. <u>წესიერი მრავალკუთხედები</u>	95
7. <u>ვექტორი</u>	97

შესავალი

XII კლასში მათემატიკის საგნის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში კვლევის ჩვევის, აგრეთვე ანალიტიკური, ლოგიკური, სისტემური და სიმბოლური აზროვნების გამომუშავება. მათემატიკის სწავლამ მოსწავლეს უნდა შესძინოს ის უნარ-ჩვევები, რომელიც მას დაეხმარება ცხოვრებისეული, პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრაში.

ეროვნული სასწავლო გეგმის დანიშნულებაა დაეხმაროს სასკოლო განათლების პროცესის მონაწილეებს ამ პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში აღწერილია ის სავალდებულო მოთხოვნები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა მოსწავლე სასწავლო წლის დასრულების მერე. ეს მოთხოვნები თითოეული მიმართულებისათვის შედეგებისა და მათი ინდიკატორების ენაზეა ჩამოყალიბებული.

შედეგი არის დებულება იმის შესახებ, თუ რა უნდა შესძლოს მოსწავლემ სწავლის მოცემული საფეხურის დასრულების შემდეგ.

ინდიკატორი არის დებულება იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დემონსტრირების შესახებ, რომელიც ჩამოყალიბებულია შესაბამის შედეგში. ინდიკატორის ძირითადი დანიშნულებაა იმის წარმოჩენა, მიღწეულია თუ არა შედეგი. ინდიკატორი ორიენტირებულია უნარ-ჩვევებზე და ჩამოყალიბებულია აქტივობის ენაზე.

XII კლასის წარმოდგენილი სახელმძღვანელოს დანიშნულებაა ხელი შეუწყოს ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

სახელმძღვანელო ფარავს სტანდარტის ყველა შედეგს.

მასალის მიწოდების ძირითადი მეთოდური ორიენტირია პრობლემური თხრობა. მოსწავლე არის გაკვეთილის ახსნის აქტიური მონაწილე.

გაგაცნობთ წიგნის სტრუქტურას.

თითქმის ყველა პარაგრაფი იწყება სიტუაციური ამოცანით, მაპროვოცირებელი შეკითხვით ან ისეთი ამოცანით, რომელიც მოსწავლისაგან კვლევას მოითხოვს და რომელიც იძლევა ვარაუდის გამოთქმის საშუალებას. გაკვეთილის ეტაპები გამოყოფილია აქტივობებით, რითაც ხდება ახალი მასალის ათვისების შემოწმება და გაღრმავება. ვარსკვლავით მონიშნულია ამოცანები მაღალი შეფასებისათვის.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში მოცემულია რამოდენიმე გაკვეთილის სცენარი, აქტივობების მიზანი, დანიშნულება, სავარაუდო და სწორი პასუხები, საკონტროლოს ნიმუშები. მოცემულია შეფასების ძირითადი მდგენელები, დამხმარე ლიტერატურა მასწავლებლისათვის.

აგრეთვე გთავაზობთ სავარაუდო საათობრივ განაწილებას. სარეზერვო საათები გვაძლევს საშუალებას, რომ ზოგიერთ გაკვეთილს მასწავლებელმა მეტი დრო დაუთმოს, გამოიყენოს თავისი შეხედულებისამებრ.

ეროვნული სასწავლო გეგმა

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები მიმართულებების მიხედვით:

რიცხვები და მოქმედებები	კანონზომიერებები და ალგებრა	გეომეტრია და სივრცის აღქმა	მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა
XII.1. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა. XII.2. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დამტკიცების პროცესისა და მისი შედეგის ანალიზი.	XII.3. მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის ან ფუნქციათა ოჯახის თვისებების კვლევა და დადგენა და ამ თვისებების ინტერპრეტირება კონტექსტთან მიმართებაში. XII.4. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის მეთოდების გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.	XII.5. მოსწავლეს შეუძლია ფიგურების ან მათი ელემენტების ზომების პოვნა/ შეფასება და მათი გამოყენება პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრისას. XII.6. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.	XII.7. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. XII.8. მოსწავლე აღწერს შემთხვევითობას ალბათური მოდელების საშუალებით. XII.9. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები

მიმართულება: რიცხვები და მოქმედებები

XII.1. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- მსჯელობს რიცხვებთან დაკავშირებული ალგორითმების მნიშვნელობაზე პრაქტიკული საქმიანობიდან და მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდინარე სხვადასხვა პრობლემების გადაჭრისას;
- იყენებს მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების თვისებებს პრაქტიკული საქმიანობიდან ან მეცნიერების სხვადასხვა დარგებიდან მომდინარე გამოთვლებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი, ენტროპია ბიოლოგიასა და ფიზიკაში, ინფორმაციის მოცულობა, რადიოაქტიული დაშლა და დათარიღების მეთოდები);
- სიდიდის ცვლილების გრაფიკული გამოსახვისას ირჩევს და იყენებს შესაფერის სკალას (მაგალითად, ლოგარითმულ სკალას).

XII.2. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დამტკიცების პროცესისა და მისი შედეგის ანალიზი.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ახდენს რიცხვების შესახებ დებულების ან რაოდენობრივი მსჯელობის ნიმუშის და მისი შედეგის ანალიზს ერთი ან რამდენიმე პირობის, შეზღუდვის ან დაშვების შესუსტება-მოხსნით;
- ასაბუთებს რიცხვების თვისებების ან რიცხვით კანონზომიერებების შესახებ განზოგადებით, ანალოგიით მიღებულ დასკვნებს ან დებულებებს (მათ შორის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით);
- რაოდენობებთან და სიდიდეებთან დაკავშირებული მსჯელობის ნიმუშზე ახდენს მსჯელობის ხაზის და დასკვნითი ნაწილის კრიტიკულ ანალიზს.

მიმართულება: კანონზომიერებები და ალგებრა

XII.3. მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის ან ფუნქციათა ოჯახის თვისებების კვლევა და დადგენა და ამ თვისებების ინტერპრეტირება კონტექსტთან მიმართებაში.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- აღწერს და ადარებს შესწავლილ ფუნქციათა ოჯახებს ისეთი თვისებების მიხედვით, როგორიცაა: განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, ფესვებისა და ექსტრემუმის წერტილთა შესაძლო რაოდენობა, ნიშანმდმივობისა და ზრდადობა/კლებადობის შუალედები, პერიოდულობა, ასიმპტოტური ქცევა, გრაფიკის გეომეტრიული თვისებები; ახდენს ამ თვისებების ინტერპრეტირებას კონტექსტთან მიმართებაში;
- იყენებს შესაფერის გრაფიკულ, ალგებრულ მეთოდებს და ტექნოლოგიებს ფუნქციის თვისებების (განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, ფესვები და ექსტრემუმის წერტილები, ნიშანმდმივობისა და ზრდადობა/კლებადობის შუალედები, ლუწობა/კენტობა, პერიოდულობა, ასიმპტოტური ქცევა, გრაფიკის გეომეტრიული თვისებები)

დასადგენად. ახდენს ამ თვისებების ინტერპრეტირებას კონტექსტთან მიმართებაში;

- აღწერს თუ რა გავლენას ახდენს ფუნქციის პარამეტრების ცვლილება ფუნქციის თვისებებზე; ახდენს ამ გავლენის ინტერპრეტირებას კონტექსტთან მიმართებაში.
- იყენებს შესწავლილ ფუნქციებს და მათ თვისებებს მოდელირებისას და პრობლემის გადაჭრისას.

XII.4. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის მეთოდების გამოყენება მოდელირებისას და პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს იტერაციას, რეკურსიას და მათემატიკურ ინდუქციას მოდელირებისას, დებულებების დასაბუთებისას, ფორმულების გამოყვანისას, კომბინატორული ამოცანების ამოხსნისას;
- იყენებს გრაფებს, ხისებრ დიაგრამებს და მათ თვისებებს მოდელირებისას და ამოცანების ამოხსნისას.

მიმართულება: გეომეტრია და სივრცის აღქმა

XII.5. მოსწავლეს შეუძლია ფიგურების ან მათი ელემენტების ზომების პოვნა/შეფასება და მათი გამოყენება პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- პოულობს სივრცული ფიგურის მოცულობას;
- იყენებს სივრცული ფიგურის ზომებს შორის ფუნქციურ დამოკიდებულებას ოპტიმიზაციის ზოგიერთი პრობლემის გადასაჭრელად (მათ შორის რეალური ვითარების შესაბამის ამოცანებში; მაგალითად *ცილინდრული ფორმის ღია კონსერვის ყუთის დამზადებაზე იხარჯება S სმ² მასალა. როგორი უნდა იყოს ყუთის წრფივი ზომები, რომ მისი მოცულობა უდიდესი იყოს?*);
- იყენებს ვექტორებს გეომეტრიული დებულებების დასამტკიცებლად და ზომების დასადგენად;
- იყენებს ფიგურის ზომებს და მათ შორის კავშირებს გეომეტრიული ალბათობის დასადგენად.

XII.6. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ფიგურის გეომეტრიულ გარდაქმნას სიბრტყეზე გამოსახავს დეკარტეს კოორდინატების საშუალებით;
- ასახელებს კოორდინატებში მოცემული გეომეტრიული გარდაქმნის შესაძლო ტიპს (პარალელური გადატანა, სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრია, საკოორდინატო ღერძების მიმართ ღერძული სიმეტრია).

მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა

XII.7. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- არჩევს მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერის გრაფიკულ ფორმებს, ასაბუთებს თავის არჩევანს, აგებს და განმარტავს ცხრილებს/დიაგრამებს;
- დაწყვილებული მონაცემებისთვის ქმნის გაფანტულობის დიაგრამას, თვისობრივად აღწერს მის ფორმას (რომელიმე წირის მაგალითად წრფის, პარაბოლის, მიდამოში კონცენტრაცია), აგებს საუკეთესო მისადაგების წრფეს;
- ადგენს სიხშირეთა განაწილებას, წარმოადგენს მას გრაფიკულად და აღწერს მის ფორმას (მაგალითად, სიმეტრიულობა/ასიმეტრიულობა, მაქსიმუმის/მინიმუმის წერტილები).

XII.8. მოსწავლე აღწერს შემთხვევითობას ალბათური მოდელების საშუალებით.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- განასხვავებს დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ხდომილობებს, ასახელებს მათ მაგალითებს და ითვლის ხდომილობათა პირობით ალბათობებს;
- ითვლის რთულ ხდომილობის ალბათობას ჯამისა და ნამრავლის ფორმულების გამოყენებით;
- ატარებს ექსპერიმენტს მრავალჯერადი დაბრუნებით და ამ ექსპერიმენტის საშუალებით ადგენს ურნის შედგენილობას – აფასებს განსხვავებული ფერის ბურთულების რაოდენობათა შეფარდებას;
- იყენებს სიმულაციებს შერჩევის სტატისტიკების (მედიანა, საშუალო მნიშვნელობა, საშუალო კვადრატული გადახრა) ვარიანტურობის გამოსაკვლევად და შერჩევის განაწილებათა ასაგებად.

XII.9. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს მოცემული შერჩევისთვის ისეთ რიცხვით მახასიათებლებს, რომლებიც ხელსაყრელია ამოცანის ამოსახსნელად და ასაბუთებს თავის არჩევანს, ითვლის და ითვალისწინებს არჩეულ მახასიათებლებს გადაწყვეტილების მიღებისას;
- ახდენს მონაცემთა ინტერპოლაციას/ექსტრაპოლაციას საუკეთესო მისადაგების წრფის საშუალებით;
- ამოიცნობს ჩანაცვლებას შერჩევისა და გამოკითხვის ნიმუშში, მსჯელობს თუ როგორ ზეგავლენას ახდენს შერჩევითი მეთოდი და შერჩევის მოცულობა დასკვნათა სანდოობაზე;
- ითვლის კორელაციის კოეფიციენტს და მსჯელობს დაწყვილებულ მონაცემებს შორის წრფივი კავშირის შესახებ.

შინაარსისა და მიზნების რუკა

შინაარსი	თემის კავშირი მიზნებთან და შედეგებთან	სავარაუდო ხანგრძლივობა
1	2	3
I თავი მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი. პრიზმის ზედაპირის ფართობი. პირამიდის ზედაპირის ფართობი. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა. კავალიერის პრინციპი. პირამიდის მოცულობა. ცილინდრის ზედაპირის ფართობი. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი. ბირთვის ზედაპირის მოცულობა.	მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. მოსწავლე აღწერს შემთხვევითობას ალბათური მოდელების საშუალებით. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.	36 სთ
საკონტროლო წერა №1		1 სთ
II თავი ალბათობის თეორიის ელემენტები. ბერნულის ფორმულა. სტატისტიკის ელემენტები. კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები.	მოსწავლეს შეუძლია ფიგურების ან მათი ელემენტების ზომების პოვნა/შეფასება და მათი გამოყენება პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.	20 სთ
საკონტროლო წერა №2		1 სთ

1	2	3
III თავი რაციონალური რიცხვი. ირაციონალური რიცხვი. პროპორცია. პროცენტი. სიმრავლე. გრაფი. კენინგსბერგის ხიდების ამოცანა. ფუნქცია. განტოლება. განტოლებათა სისტემა. ამოცანები. უტოლობები. წრფივი დაპროგრამების ამო- ცანების გრაფიკული ამოხსნა. მიმდევრობა.	მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე პრობლემების გადაწყვეტა. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა- დამტკიცების პროცესისა და მისი შედეგის ანალიზი. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით და მათი ინტერპრეტაცია. მოსწავლე აღწერს შემთხვევითობას ალბათური მოდელების საშუალებით. მოსწავლეს შეუძლია მონაცემთა ანალიზი და დასკვნების ჩამოყალიბება.	60 სთ
საკონტროლო წერა №3		1 სთ
IV თავი საწყისი გეომეტრიული ცნებები. სამკუთხედები. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წრენირი. აგების ამოცანები. მრავალკუთხედები. მრავალკუთხედის ფართობი. წესიერი მრავალკუთხედები. ვექტორი.	მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის ან ფუნქციითა ოჯახის თვისებების კვლევა და დადგენა და ამ თვისებების ინტერპრეტირება კონტექსტთან მიმართებაში. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის მეთოდების გამოყენება მოდელოებისას და პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია ფიგურების ან მათი ელემენტების ზომების პოვნა/შეფასება და მათი გამოყენება პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული გარდაქმნების დახასიათება და მათი გამოყენება გეომეტრიული პრობლემების გადაჭრისას.	60 სთ
საკონტროლო წერა №4		1 სთ

მოსწავლის შეფასების სისტემა

მოსწავლის შეფასების მიზანი, პრინციპები და მიდგომები

1. მოსწავლის შეფასების მიზანია სწავლა-სწავლების ხარისხის მართვა, რაც გულისხმობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე ზრუნვასა და კონტროლს.
2. მოსწავლის აკადემიური მიღწევის შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი; მან ხელი უნდა შეუწყოს: მოსწავლეთა მრავალმხრივ განვითარებას, მათი შესაძლებლობების გამოვლენას, სხვადასხვა პოტენციალის მქონე მოსწავლეთათვის თანაბარი პირობების შექმნას.
3. მოსწავლე უნდა შეფასდეს სხვადასხვა ფორმებით (ესე, პროექტის მომზადება, ზეპირი გამოსვლა, ექსპერიმენტის ჩატარება, ცდის ჩატარება, წარმოდგენა, წერიტი, ფერწერული ან სხვა ტიპის ნამუშევარი, არგუმენტირებული მსჯელობა და სხვ.).

განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასება

1. სკოლაში გამოიყენება ორი ტიპის შეფასება: განმსაზღვრელი და განმავითარებელი.
2. განმსაზღვრელი შეფასება აკონტროლებს სწავლის ხარისხს, ადგენს მოსწავლის მიღწევის დონეს ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში. განმსაზღვრელ შეფასებაში იწერება ქულა.
3. განმავითარებელი შეფასება აკონტროლებს თითოეული მოსწავლის განვითარების დინამიკას და ხელს უწყობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებას. განმავითარებელი შეფასებისას გამოიყენება ისეთი საშუალებები, როგორიცაა სიტყვიერი კომენტარი, რჩევა-დარიგება, დაკვირვების ფურცელი, თვითშეფასებისა და ურთიერთშეფასების სქემა და სხვ.
4. განმავითარებელი და განმსაზღვრელი შეფასებების აღწერილობა

	განმავითარებელი	განმსაზღვრელი
მიზანი	სწავლის ხარისხის გაუმჯობესება; მოსწავლის განვითარების ხელშეწყობა	სწავლის ხარისხის აკონტროლება; მოსწავლის მიღწევის დონის დადგენა ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში; აკადემიური მოსწრების დონის განსაზღვრა
შეფასების საგანი	სწავლის პროცესი	სწავლის შედეგი
შეფასების შედეგად მიღებული გადაწყვეტილება	წინსვლის ხელშესაწყობად განსხვავებული აქტივობის შერჩევა, სწავლების სტრატეგიის შეცვლა, რჩევა-დარიგების მიცემა და სხვ.	მომდევნო ეტაპზე (კლასში/საფეხურზე) დაშვება/არდაშვება
წარმართების კრიტერიუმების განსაზღვრა	კონკრეტული მოსწავლის წინსვლის საფუძველზე (საკუთარ მიღწევებთან მიმართებით - რა დონეს ფლობდა, რა დონეს ფლობს)	იმის საფუძველზე, თუ რამდენად მიაღწია სტანდარტით განსაზღვრულ შედეგებს (ყველასათვის საერთო, სტანდარტით დადგენილ ნორმასთან მიმართებაში)
შეფასების საშუალებები	თვით/ურთიერთშეფასების რუბრიკა; კითხვარი; სიტყვიერი (ზეპირი/წერილობითი) კომენტარი; უნარის განვითარების დონის აღწერა.	ქულა

მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევები ფასდება ათქულიანი სისტემით

ქულები	შეფასების დონეები
10	მაღალი
9	
8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

საგნის სემესტრული ქულის შემადგენელი კომპონენტები

1. სემესტრის მანძილზე მოსწავლეები ფასდებათ შემდეგი სამი კომპონენტის მიხედვით:
 - ა) საშინაო დავალება;
 - ბ) საკლასო დავალება;
 - გ) შემაჯამებელი დავალება.
2. შეფასების სამივე კომპონენტს ერთნაირი წონა აქვს.
3. საშინაო და საკლასო დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება როგორც განმსაზღვრელი, ასევე განმავითარებელი შეფასება.
4. შემაჯამებელი დავალების კომპონენტში აუცილებელია განმსაზღვრელი შეფასების გამოყენება.
5. ეროვნული სასწავლო გეგმა თითოეული საგნისათვის განსაზღვრავს სემესტრის განმავლობაში ჩასატარებელი შემაჯამებელი დავალებების სავალდებულო მინიმალურ რაოდენობას. ამ კომპონენტით შეფასებისას:
 - ა) სტანდარტის მოთხოვნათა დასაკმაყოფილებლად, აუცილებელია შემაჯამებელი დავალების მრავალგვარი ფორმის გამოყენება (თხზულება, მოხსენება, რეფერატი, პროექტი, სავლე-გასვლითი სამუშაო, ლაბორატორიული კვლევა, სახვითი და გამოყენებითი ხელოვნების ნიმუში და სხვ.);
 - ბ) მოსწავლე ვალდებულია შეასრულოს კლასში ჩატარებული ყველა შემაჯამებელი დავალება (ეროვნული სასწავლო გეგმით დადგენილი სავალდებულო მინიმუმი და სკოლის მიერ დამატებით დადგენილი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში);
 - გ) თუ მოსწავლე არ შეასრულებს რომელიმე შემაჯამებელ სამუშაოს გაცდენის გამო, სკოლა ვალდებულია, მისცეს მას გაცდენილი შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის საშუალება. შემაჯამებელი აღდგენითი სამუშაოს ვადები და მისი ჩატარების ფორმა განისაზღვრება სასკოლო სასწავლო გეგმით.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულათა სახეობები

ზოგადსაგანმანათლებლო სისტემაში გამოიყენება განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგი სახეობები:

- ა) საგნის მიმდინარე და შემაჯამებელი ქულები – საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი კომპონენტის ქულები, რომლებსაც მოსწავლე იღებს სემესტრის განმავლობაში;
- ბ) საგნის სემესტრული ქულა – საგანში მიღებული შეფასება თითოეულ სემესტრში (სემესტრული გამოცდის ჩაბარების შემთხვევაში, გამოითვლება მისი გათვალისწინებით);

გ) საგნის წლიური ქულა – სემესტრული ქულებიდან გამომდინარე შეფასება საგანში. წლიურ ქულაში შეიძლება წლიური გამოცდის ქულაც აისახოს, თუ ასეთი გამოცდა გათვალისწინებულია სასკოლო სასწავლო გეგმით და სკოლის მიერ განსაზღვრულია, რომ მას გავლენა ექნება საგნის წლიურ ქულაზე;

დ) საერთო წლიური ქულა – საგნების წლიური ქულებიდან გამომდინარე შეფასება;

ე) საფეხურის საერთო ქულა – ზოგადი განათლების რომელიმე საფეხურის (დაწყებითი, საბაზო, საშუალო) საერთო შეფასება.

ქულების გამომსახვეობის წესი

1. საგნის სემესტრული ქულის გამომსახვეობის წესი:

ა) მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში სამივე კომპონენტში (საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი) მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობაზე;

ბ) მიღებული ქულა უნდა დამრგვალდეს მთელის სიზუსტით (მაგ., 6.15 მრგვალდება 6-მდე, 7.49 მრგვალდება 7-მდე, 8.5 მრგვალდება 9-მდე);

გ) იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეს არა აქვს შესრულებული ყველა შემაჯამებელი დავალება, მისი სემესტრული ქულის გამოსაანგარიშებლად სამივე კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულებისა და შესრულებული შემაჯამებელი დავალებების რაოდენობის ჯამზე.

2. საგნის წლიური ქულის გამომსახვეობის წესი:

ა) საგნის წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად საგნის სემესტრული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს ორზე;

ბ) საგნის წლიური ქულა მრგვალდება მთელის სიზუსტით (მაგ., 7.25 მრგვალდება 7-მდე, 4.49 მრგვალდება 4-მდე, 9.5 მრგვალდება 10-მდე);

გ) თუ სასკოლო სასწავლო გეგმა ითვალისწინებს წლიური გამოცდის ჩატარებას და განსაზღვრულია, რომ ამ გამოცდის ქულაც აისახება წლიურ ქულაზე, მაშინ საგნის წლიური ქულა სამი (ორი - საგნის სემესტრული და ერთი - გამოცდის) ქულის საშუალო არითმეტიკულია (დამრგვალებული მთელის სიზუსტით).

3. საერთო წლიური ქულის გამომსახვეობის წესი:

ა) საერთო წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად უნდა შეიკრიბოს ეროვნული სასწავლო გეგმით კონკრეტული კლასისთვის გათვალისწინებული ყველა სავალდებულო საგნის წლიური ქულა (საშუალო საფეხურზე, აგრეთვე, სასკოლო სასწავლო გეგმით განსაზღვრული არჩევითი საგნების ქულები სავალდებულო საგნების წლიურ ქულებთან ერთად) და ჯამი გაიყოს ქულების რაოდენობაზე;

ბ) საერთო წლიური ქულა მრგვალდება მათედიის სიზუსტით (მაგ., 7.14 მრგვალდება 7.1-მდე, 8.15 მრგვალდება 8.2-მდე).

4. საფეხურის საერთო ქულის გამომსახვეობის წესი:

ა) საფეხურის საერთო ქულა გამოითვლება იმავე პრინციპით, რომლითაც ითვლება საერთო წლიური ქულა: ჯამდება საფეხურის მანძილზე ნასწავლი ყველა საგნის წლიური ქულა (მაგ. მათემატიკა მე-10 კლასი, მათემატიკა მე-11 კლასი, მათემატიკა მე-12 კლასი, ქართული მე-10 კლასი, ქართული მე-11 კლასი, ქართული მე-12 კლასი და ა.შ.) და ჯამი იყოფა ქულების საერთო რაოდენობაზე;

ბ) საფეხურის საერთო ქულა მრგვალდება მათედიის სიზუსტით (მაგ., 6.43 მრგვალდება 6.4-მდე, 7.58 მრგვალდება 7.6-მდე).

ბთავაზოთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს

თავი I

§3. პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი

რეზიუმე: მოსწავლეები გაეცნობიან პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოსაკვლევ ფორმულას.

აქტივობის მიზანი: პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლის წესის, ფორმულის შესწავლა და ამ წესის გამოყენების უნარ-ჩვევის შემუშავება.

სავარაუდო ხანგრძლივობა — 2 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:

- 1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით. შემდგომ, მასწავლებელი ავალეს მოსწავლეებს იფიქრონ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანაზე. კითხვა-პასუხის რეჟიმში განიხილება წიგნში მოცემული მოსწავლეებისათვის განკუთვნილი ინდივიდუალური შეკითხვები (10 წთ).
- 2) მასწავლებელი, კლასთან აქტიური თანამშრომლობის რეჟიმში ამტკიცებს პირამიდის გვერდითი ზედაპირის გამოსათვლელ ფორმულას (10 წთ).
- 3) შემდეგ ირჩევა პარაგრაფში განხილული ამოცანა.
მასწავლებელმა ხაზი უნდა გაუსვას იმას, რომ ამ ამოცანის შედეგის გამოყენება შეიძლება სხვა დავალებების შესრულების დროს (10 წთ).
- 4) აქტივობის გაფართოება – გაღრმავების მიზნით სასურველია ხაზი გაესვას იმას, რომ პარაგრაფში მოცემული წინადადებების ტოლფასი წინადადებებია:
ა) „პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა ფუძეები ტოლია“;
ბ) „პირამიდის წვერო გეგმილდება ჩახაზული წრეწირის ცენტრში“;
გ) „პირამიდის გვერდითი წახნაგების, პირამიდის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები ტოლია (სიმაღლის ფუძე პირამიდის წიბოზე მდებარეობს).
ე.ი. თითოეულ ამ შემთხვევაში $S_{\text{გვე}} = \frac{S_{\text{ფუძის}}}{\cos \varphi}$ სადაც φ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეა (10 წთ).
- 5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ).
მეორე გაკვეთილი ეთმობა პარაგრაფში მოცემული დარჩენილი ამოცანების ამოხსნას, შესწავლილი მასალის განმტკიცებას.

თავი II

§2. ბერნულის ფორმულა

რეზიუმე: მოსწავლეები გაეცნობიან ბერნულის ფორმულას.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლეები გაეცნობიან ბერნულის ფორმულას, გამოიმუშავენ ამ ფორმულის გამოყენების უნარ-ჩვევას.

შეძლებენ იმ სიტუაციის (პრობლემის) ამოცნობას, რომლის გადასაწყვეტად საჭიროა ბერნულის ფორმულის გამოყენება.

გამოთვლიან n განმეორებით დამოუკიდებელ A ცდაში ხდომილობის k -ჯერ განხორციელების ალბათობას.

სავარაუდო ხანგრძლივობა – 2 სთ.

აქტივობის აღწერა:

- 1) გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც განიხილავენ პარაგრაფის დასაწყისში დასმულ პრობლემას, თითოეული შემთხვევისთვის დათვლიან შესაძლო ვარიანტებს (10 წთ).
- 2) შემდეგ მასწავლებელი სთავაზობს ამ პრობლემის გადაჭრის სხვა, განსხვავებულ ხედვას: A ხდომილობის საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობისთვის დაითვალონ $P(A)$ ალბათობა და შემდეგ იპოვონ A ხდომილობის $P(\bar{A})=1-P(A)$ ალბათობა (10 წთ).
- 3) იხილავენ პარაგრაფში მოცემულ ამოცანას და მოსწავლეთათვის განკუთვნილ ინდივიდუალურ შეკითხვებს, რასაც საბოლოოდ მიეცემა ბერნულის განტოლებამდე. სასურველია მასწავლებელმა ხაზი გაუსვას იმას, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობას k -ჯერ განხორციელების ალბათობა იგივეა, რაც იმავე ხდომილობის $(n-k)$ -ჯერ არ განხორციელების ალბათობა (10 წთ).
- 4) აქტივობის გაფართოება – გაღრმავების მიზნით მასწავლებელი, მოსწავლეებთან აქტიური თანამშრომლობის რეჟიმში იხილავს წიგნში გარჩეულ 2 ამოცანას (10 წთ).
- 5) მასწავლებელი აჯამებს გაკვეთილს და მოსწავლეებს აძლევს საშინაო დავალებას (5 წთ). მეორე გაკვეთილი ეთმობა პარაგრაფში, საშინაო დავალებისთვის განკუთვნილ დარჩენილ ამოცანებს. ბერნულის განტოლების გამოყენების უნარ-ჩვევის გამომუშავებას.

თავი III

§12. წრფივი დაპროგრამირების ამოცანების გრაფიკული ამოხსნა

შეიძლება ჩატარდეს ღია გაკვეთილი

რეზიუმე: მოსწავლე ეცნობა წრფივი დაპროგრამირების ამოცანებს.

აქტივობის მიზანი:

წრფივი ფუნქციების, მათი თვისებების, წრფივი უტოლობების გამოყენება რეალური პროცესების მოდელირებისას.

ფუნქციის მაქსიმუმის, მინიმუმის ინტერპრეტაცია იმ რეალური პროცესის კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება.

ოპტიმიზაციის პრობლემების გადასაწყვეტად წრფივი დაპროგრამირების მეთოდების გამოყენების უნარ-ჩვევების განვითარება.

(მაგალითად, შეზღუდული რესურსების ეფექტურად გამოყენების ამოცანაში).

წინა ცოდნა:

მოსწავლეებს შეუძლიათ:

წრფივად დამოკიდებულ სიდიდეებს შორის მიმართების ალგებრულად ჩაწერა;

წრფივი, ორუცნობიან უტოლობათა სისტემის ამონახსნების პოვნა საკოორდინატო სიბრტყეზე.

გაკვეთილის I ფაზა (პროვოცირება).

1. გაკვეთილზე შეგვაქვს სარეკლამო რგოლი, რომელიც გულისხმობს ერთ შემთხვევაში საწარმოს მოგებას, მეორეს მხრივ, საუბარია საუკეთესო შენამდენზე;

2. მცირე დისკუსია რეკლამასთან დაკავშირებით.

3. მოსწავლეებს განუმარტოთ, რომ გაკვეთილის მიზანია, გავეცნოთ წრფივი დაპროგრამირების ამოცანებს და მათი გადაწყვეტის ალგებრულ და გეომეტრიულ გზებს.

გაკვეთილის II ფაზა:

1. ვაყალიბებთ საყოფაცხოვრებო ამოცანას.

2. მოსწავლეები წყვილებში ან მცირე ჯგუფებში, შეეცდებიან ამოცანის მათემატიკურ მოდელირებას.

მოსწავლეები, თავიანთ ნამუშევარს შეადარებენ მასწავლებლის მიერ მომზადებულ საპრეზენტაციო ნამუშევარს.

აღვნიშნავთ, რომ განხილული ამოცანა წრფივი დაპროგრამების ამოცანაა.

მოკლედ გავაცნობთ ისტორიას (გამოვიყენებთ პრეზენტაციას).

წყვილებში სამუშაოდ მივცემთ დავალებას: საკოორდინატო სისტემაზე დაშტრიხონ დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

სამუშაოს, რომელიმე მოსწავლესთან ერთად მასწავლებელიც შეასრულებს "GEOGEBRA"-ში.

ამოცანას ამოვხსნით ეკრანზე გეომეტრიულად.

გავაცნობთ თეორემას.

წყვილები თეორემის გამოყენებით ალგებრულად იპოვნიან ამონახსნს.

მოვახდენთ შედეგების შედარებას.

გაკვეთილის III ფაზა (რეფლექსია)

დავურიგებთ ფერად ფურცლებს გეომეტრიული გზის 1 დადებითი და 1 უარყოფითი მხარის დასაფიქსირებლად და გააკრავენ T დიაგრამაზე.

გავაკეთებთ შეფასებებს.

მივცემთ დავალებად მსგავს ამოცანას, რეფერატების მომზადებას.

1. წრფივი დაპროგრამება.

2. ნობელის პრემია.

რესურსები

დაფა, ცარცი, პროექტორი, პროგრამა GEOGEBRA, მიკროფონი, ფერადი ფურცლები, ფორმატი T დიაგრამით, PowerPoint-ში მომზადებული პრეზენტაცია, თაბახის ფურცლებზე ამობეჭდილი ამოცანა წყვილებში სამუშაოდ და საშინაო დავალების ამოცანები და საკითხები.

გაკვეთილზე გამოყენებული მეთოდები და სტრატეგიები

ლექცია, დისკუსია, პრეზენტაცია, წყვილური და ინდივიდუალური მუშაობა, T დიაგრამა.

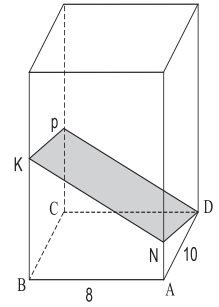
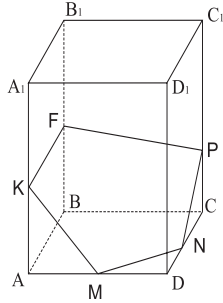
თავი I

1. მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილი

1. კვეთაში მიიღება პარალელოგრამო, რომლის ორთოგონალური გეგმილი $ABCD$ პარალელოგრამია.

$$S_{\text{კვ}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ} = \frac{8 \cdot 10 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$S_{\text{კვ}} = 40\sqrt{2}$$



2. მკვეთი სიბრტყის ორთოგონალური გეგმილი $ABCMN$ ხუთკუთხედი.

$$S_{ABCMN} = S_{\text{კვ}} \cdot \cos \alpha = 14 \cos 60^\circ = 7 (\text{სმ}^2)$$

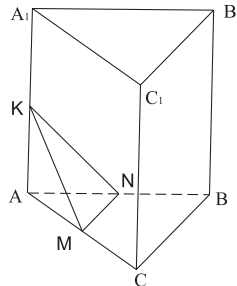
$$S_{ABCMN} = S_{ABCD} - S_{MDN} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7}{8}a^2, \quad a \equiv AB$$

$$S_{ABCD} = a^2 = 8$$

$$3. S_{\text{კვ}} = \frac{S_{\text{ფ}}}{\cos \alpha} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{3}} = 9 (\text{სმ}^2)$$

4. MNK სამკუთხედის გეგმილი

$$\text{ფუძეში სამკუთხედი } S_{MNK} = \frac{S_{AMN}}{\cos \alpha} = \frac{9}{4}$$



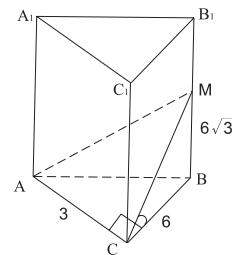
8. ა) ვთქვათ კვეთაში მიიღება სამკუთხედი.

$$AC \perp BC \Rightarrow MC \perp AC \Rightarrow \angle BCM = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB = BC \tan 60^\circ = 6\sqrt{3} > 6$$

ე.ი. $M \notin [BB_1]$. M მდებარეობს BB_1 -ის გაგრძელებაზე.

ე.ი. კვეთის სიბრტყე $AKFC$ ტრაპეციაა.



$$\text{გვ. } (A_1B_1C_1)AKFC = A_1KFC_1 \text{ ტრაპეცია. } \frac{MB_1}{MB} = \frac{FB_1}{BC}$$

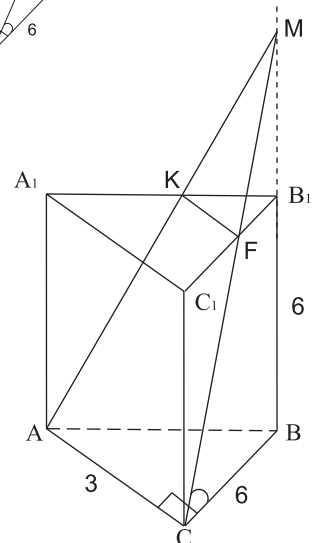
$$\frac{FB_1}{BC} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \quad \Delta KFB_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{KFB_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{FB_1}{B_1C_1} \right)^2$$

$$S_{KFB_1} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \right)^2 9 = (4 - 2\sqrt{3})3.$$

$$S_{A_1KFC_1} = S_{\Delta A_1B_1C_1} - S_{KFB_1} = 6\sqrt{3} - 3.$$

$$S_{\text{კვ}} = \frac{S_{A_1KFC_1}}{\cos 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 12 - 2\sqrt{3}.$$



10. ბ) $f(x) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. $\frac{A}{3} = A \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $x = \log_2 3 \approx 1,6$ (დღის შემდეგ).

11. ს) $\{[12,3]\} = \{12\} = 0$ ბ) $[\{12,3\}] = [0,3] = 0$.

12. ს) $[x - 0,36] = [2,4] \Leftrightarrow [x - 0,36] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x - 0,36 < 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2,36 \leq x < 3,36. \quad x \in [2,36; 3,36)$

ბ) 1) $\{1,62 + x\} = 0,65$, რადგან $\{1,62 + 0,03\} = 0,65$ ე.ი. $x = a,03$, $a \in N$.

2) რადგან $\{1,62 - 1,97\} = \{-0,35\} = -0,35 - (-1) = 0,65$, ე.ი. $x = -\overline{m,97}$. $m \in N_0$.

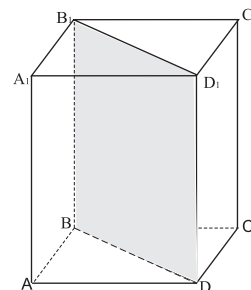
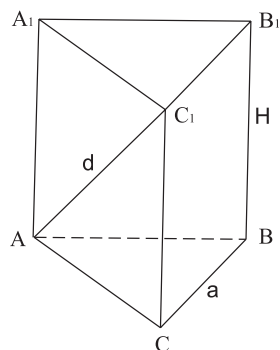
13. ს) $y = [x] + \{x\} = [x] + (x - [x]) = x$.

ბ) $y = [\{x\}] = 0$, რადგან $\{x\} \in [0,1)$.

2. პრიზმის ზედაპირის ფართობი

2. $S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = a^2 \sqrt{2}$ $S_b = 6a^2 = 72$ $a^2 = 12$.

$S_{BB_1D_1D} = 12\sqrt{2} \text{ დმ}^2 = 1200\sqrt{2} \text{ სმ}^2 \approx 1680 \text{ სმ}^2$



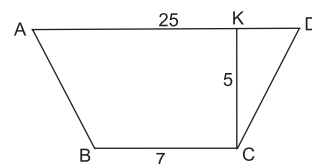
5. $S_{\text{პიკ}} = 3aH = 4320 \text{ დმ}^2 \Rightarrow aH = 1440$

$a^2 + H^2 = 82^2$. $(a + H)^2 = 2880 + 82^2 = 4(41^2 + 720) = 4 \cdot 49^2$

$a + H = 98$. $a = 80$ და $H = 18$

6. $KD = \frac{25-7}{2} = 9$; $CD = \sqrt{106}$

$S = (2AB + BC) \cdot 1000 = (7 + 2\sqrt{106}) 1000 (\text{მ}^2)$

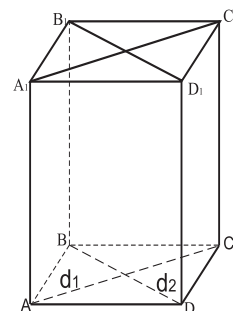


9. $d_1 H = 20$; $d_2 H = 15 \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

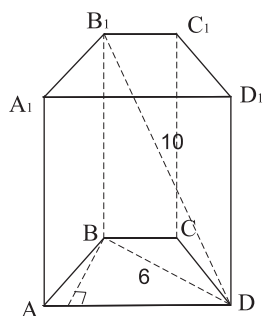
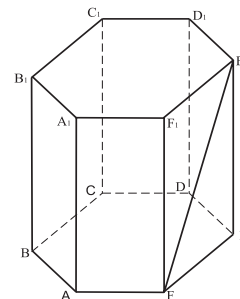
$\frac{d_1}{2} = 4x$ $\frac{d_2}{2} = 3x \Rightarrow a = 5x$, $AB \equiv a$.

$S_{\text{პიკ}} = 4aH = 20xH$.

აქედან $20 = d_1 H = 8xH$
 $xH = \frac{5}{2}$. ე.ი. $S_{\text{პიკ}} = 20 \cdot \frac{5}{2} = 50$



12. $6aH = 288 \Rightarrow aH = 48. \quad a^2 + H^2 = 100 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a + H = 14 \quad a = 6 \text{ და } H = 8$



13. $\triangle ABK$ -ში

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow AK = 5x \text{ და } AB = 13x \Rightarrow$$

$$KD = BC + AK = 18x; \quad BK = 12x. \quad \triangle BKD - \text{ში } 36 = (18x)^2 + (12x)^2 =$$

$$= 36x^2(9 + 4) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\triangle BB_1D - \text{დას } BB_1 \equiv H = 8$$

$$S_{\text{ს}} = (3AB + AD)H = (39x + 23x)8 = \frac{62 \cdot 8}{\sqrt{13}} = \frac{496}{\sqrt{13}}$$

15. $B_1K \perp D_1C_1 \Rightarrow B_1K \perp (DD_1C_1C).$

კუთხე B_1D -სა და გვერდით წახნაგს შორის არის

$$\angle B_1DK = 45^\circ. \quad B_1K = DK. \quad S_{\text{გ}} = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle B_1C_1K - \text{დას } B_1KA = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow B_1K = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

$$B_1D = B_1K \sqrt{2} = \frac{a \sqrt{6}}{2} \quad \triangle BB_1D - \text{ში } H = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\text{ს}} = 2S_{\text{გ}} + S_{\text{ს}} = a^2 \sqrt{3} + 4aH = a^2 \sqrt{3} + 2a^2 \sqrt{2}$$

17. ა) I. $S_1 = 1 \cdot 4 = 1(1 + 1)^2 = 4$ ჭ.

II. უ.დ. $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ ვთქვათ $S_k = k(k + 1)^2$ უ.დ. $S_{k+1} = (k + 1)(k + 2)^2$

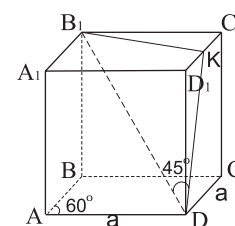
$$S_{k+1} = S_k + (k + 1)(3k + 4) = k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) =$$

$$= (k + 1)[k^2 + k + 3k + 4] = (k + 1)(k + 2)^2 \quad \text{რ.დ.გ.}$$

18. ა) $((2^2)^{-\frac{1}{4}} + (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}})((2^2)^{-0.25} - (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}}) = (2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-2})(2^{-0.5} - 2^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$

19. ბ) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

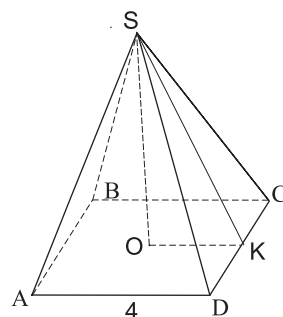
$$\begin{aligned} & \text{ctg} \alpha \text{ctg} \beta + \text{ctg} \beta \text{ctg} \gamma + \text{ctg} \alpha \text{ctg} \gamma = \text{ctg} \beta (\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \gamma) + \text{ctg} \alpha \text{ctg} \gamma = \\ & = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \\ & = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{\cos(\pi - (\alpha + \gamma)) + \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma} = 1 \quad \text{რ.დ.გ.} \end{aligned}$$



3. პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი:

6. $\triangle SOK - \text{მწკ}$ $\angle SKO = 60^\circ \Rightarrow SK = 4$.

$$S_{\text{გვ}} = 2ah = 32.$$



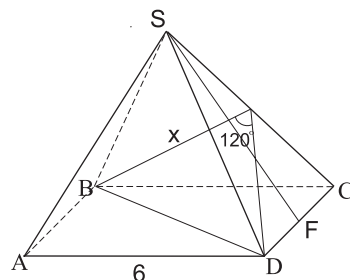
9. $DK \perp SC$; $BK \perp SC \Rightarrow \angle BKD = 120^\circ$

$\triangle BKD - \text{მწკ}$. $BK \equiv x$, $BD = 6\sqrt{2}$.

$$BD^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ. 72 = 3x^2 \quad x = 2\sqrt{6}.$$

$$\triangle DKC \sim \triangle SFC \Rightarrow \frac{SF}{DK} = \frac{FC}{KC} \quad (1) \quad KC = \sqrt{DC^2 - DK^2} = \sqrt{12}$$

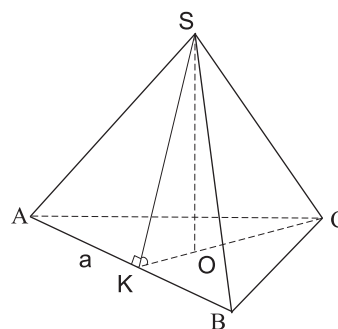
$$(1) \Rightarrow \frac{h}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow h = 3\sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{გვ}} = 2ah = 36\sqrt{2}.$$



$$11. S_{\text{გვ}} = \frac{S_{\text{ფ}}}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\text{ფ}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}$$

$$12. Q = S \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{Q}{S} \quad \alpha = \arccos \frac{Q}{S}.$$



$$13. S = S_{ABC} + S_{ACS} + S_{BSC} + S_{ABS}.$$

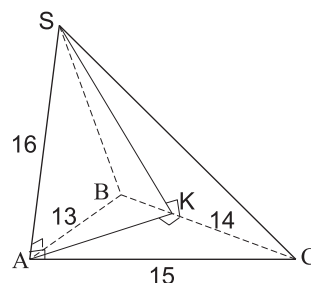
$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$$

$$S_{ABS} = 8 \cdot 13 = 104; \quad S_{ASC} = 8 \cdot 15 = 120.$$

დავუშვათ $AK \perp BC \Rightarrow BK \perp BC$

$$AK = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \Rightarrow BK = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

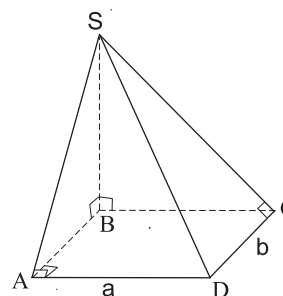
$$S_{SBC} = 140 \quad S_{\text{ფ}} = 104 + 120 + 140 + 84 = 448$$



16. $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow S$ -დან AB -ზე დაშვებული მართობი იქნება ფუძის მართობულიც. ასევე, რადგან $(SBC) \perp (ABCD)$ S -დან BC -ზე დაშვებული მართობიც $(ABCD)$ -ს მართობიც იქნება, ე.ი. $SB \perp (ABCD)$.

$$BC \perp DC \Rightarrow SC \perp DC \Rightarrow \angle SCB = 30^\circ.$$

$$AB \perp AD \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow \angle SAB = 60^\circ. \quad SB \equiv H$$



$$H = b \operatorname{tg} 60^\circ b \sqrt{3}; H = a \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow b \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$a = 3b. \text{ მაგრამ } a + b = 32 \quad b = 8 \text{ და } a = 24$$

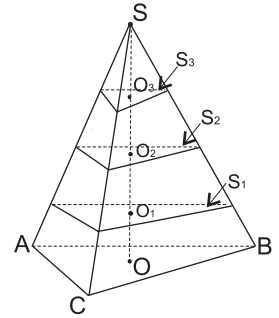
$$SC = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 = 16\sqrt{3} \cdot b + 16 \cdot 24) = \\ = 16 \cdot 4(2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3) = 192(\sqrt{3} + 1)$$

$$20. SO \equiv H; SO_1 = H_1, SO_2 = H_2, SO_3 = H_3$$

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{H_3}{H}\right)^2, \quad S_3 = \frac{1}{16} \cdot 400 = 25.$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{H_2}{H}\right)^2, \quad S_2 = \frac{1}{4} \cdot 400 = 100.$$

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2, \quad S_1 = \frac{9}{16} \cdot 400 = 225.$$



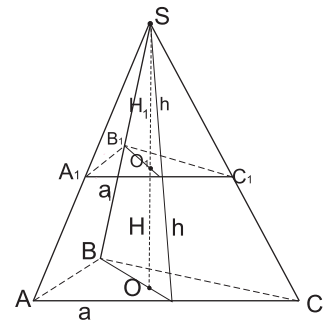
$$18. \frac{S'_{\text{გვ}}}{S_{\text{გვ}}} = \frac{4}{9} \quad S'_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} P'_{\text{გვ}} h'. \quad S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} P_{\text{გვ}} h. \quad =$$

$$\frac{H_1}{H} = \frac{h_1}{h} = \frac{a_1}{a} = \dots = k \quad (1)$$

$$h_1 = kh; \quad a_1 = ka \dots \frac{P'_{\text{გვ}}}{P_{\text{გვ}}} = k. \text{ ამიტომ } \frac{S'_{\text{გვ}}}{S_{\text{გვ}}} = \frac{P'_{\text{გვ}} h'}{P_{\text{გვ}} h} = k^2 = \frac{4}{9}$$

$$k = \frac{2}{3} \quad (1) \Rightarrow \frac{H_1}{H} = K = \frac{2}{3}. \quad \text{აქედან } \frac{S'_{\text{გვ}}}{S_{\text{გვ}}} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2; \quad \frac{H_1}{H} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{ე.ი. } SO_1:OO_1=2:1.$$



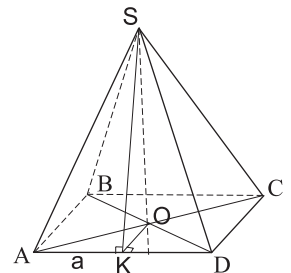
$$22. a = 10. \text{ დავუშვათ } OK \perp AD \Rightarrow SK \perp AD.$$

$$OK = \frac{AO \cdot OD}{AD} = 4,8$$

$$\Delta SOK \Rightarrow SK = \sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = 8$$

რადგან O რომბში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, ამიტომ პირამიდის გვერდითი ნახნაგების, წვეროდან გავლებული სიმაღლეები

$$\text{ტოლია. ე.ი. } S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} P_{\text{გვ}} h = 160. S_{\text{გ}} = 160 + \frac{16 \cdot 12}{2} = 256.$$



$$25. b_1 = 2, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 8, \quad b_n = 2^n \text{ გეომეტრიული პროგრესია.}$$

$$q = 2, \quad S_n = 2 \cdot 10^6, \quad 2^n \approx 10$$

$$n \approx \log_2 10^6 = 20.$$

$$x_1 = 1 \text{ სთ}; x_2 = 1 \text{ სთ}; x_3 = 1 \text{ სთ}; \dots; x_n = 1 \text{ სთ};$$

$$\text{საათების რაოდენობაა } \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = n = 20 \text{ სთ.}$$

27. ა) ვთქვათ, შესაძლებელია $a_1 = 3$, $a_k = \sqrt{7}$ და $a_n = 9$, მაშინ $d = \frac{a_k - a_1}{k - 1}$ ფორმულიდან $k - 1 = \frac{\sqrt{7} - 3}{d}$ $n - 1 = \frac{6}{d}$; $k - 1, n - 1 \in N \Rightarrow d = \frac{1}{k}; \frac{2}{k}; \frac{3}{k}; \frac{6}{k}$, $k \in N$. მაგრამ არცერთი ასეთი d -სთვის $k - 1 \notin N$ ე.ი. არ შეიძლება.

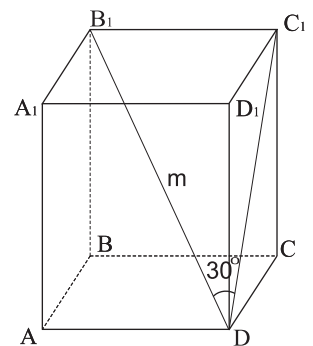
4. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.

3. $B_1C_1 \perp (DD_1C_1C)$ აქედან კუთხე B_1D და (DD_1C_1C) წახნაგებს შორის არის $\angle B_1DC_1 = 30^\circ$ ΔB_1DC_1 - ში $B_1C_1 = B_1D \sin 30^\circ = \frac{m}{2}$

$$DC_1 = m \cos 30^\circ = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta DC_1C - \text{ში } CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

$$V = S_{\text{ფ}} H = \frac{m^3 \sqrt{2}}{8}.$$



$$5. ac = 7, bc = 14, ab = 32 \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 7 \cdot 14 \cdot 32$$

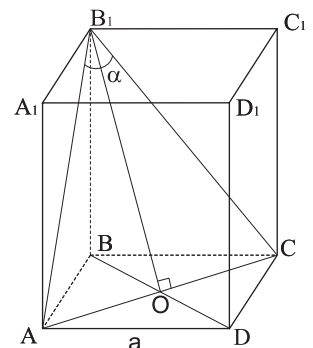
$$\Rightarrow V = abc = 7 \cdot 8 = 56.$$

$$9. BO \perp AC \Rightarrow B_1O \perp AC.$$

$$\Delta AB_1O - \text{ში } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \angle AB_1O = \frac{\alpha}{2}$$

$$AB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta ABB_1 \Rightarrow BB_1 = \sqrt{\frac{a^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - a^2} = a\sqrt{7}. V = a^3 \sqrt{7}.$$



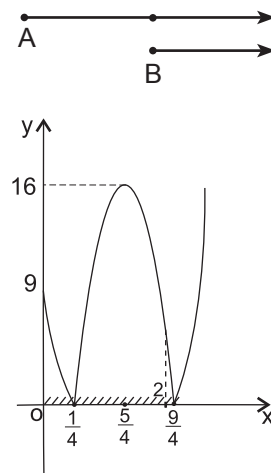
11. ვთქვათ მათ შორის მაქსიმალური დაშორება იყო x საათის შემდეგ. ამ დროში A -დან გამოსული გაივლიდა $S_A = 40x$ კმ, B -დან გამოსული, კი $S_B = 16x^2$ კმ. მათ შორის მანძილი კი იქნებოდა

$$y = |S_A - S_B - 9|$$

$$y = |16x^2 - 40x + 9|$$

$$y = 16x^2 - 40x + 9 \text{ -თვის } x = \frac{5}{4}.$$

$$y_{\max} = 16 \text{ კმ (იხ. გრაფიკი)}$$



$$13. \text{ ა) } (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (999999 - 1000000) = \\ = - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{500000} = - 500000$$

$$\text{ბ) } a_k = 7k + 5. \quad k \geq 0. \quad a_k \leq 165. \quad 7k + 5 \leq 165, k \leq 23, \quad k = 23.$$

$$S_n = \underbrace{5 + 12 + \dots + 166}_{24} \quad n = 24. \quad S_{24} = 2052.$$

$$14. (a_n) \text{ მიმდევრობა არის } y = \frac{1}{x - 5,2} - 2, \quad x \in N$$

ფუნქცია, სიმეტრიის ცენტრით $y(5,2; -2)$ უმცირესი იქნება.

$$y(5) = a_5 = \frac{1}{-0,2} - 2 = -7.$$

$$\text{უდიდესი კი } y(6) = a_6 = \frac{1}{0,8} - 2 = -\frac{3}{4}.$$

15. ასეთი რიცხვი შესაძლოა იყოს: 124, 248, 421, 842.

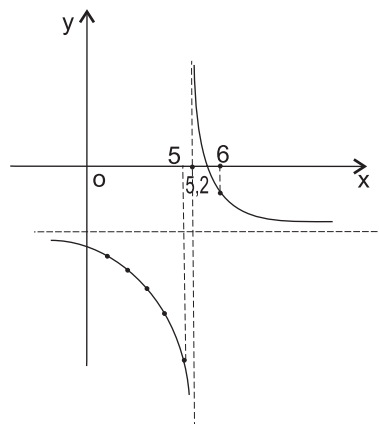
$$124 - 200 = -76 \quad \text{---}$$

$$248 - 200 = 048 \quad \text{+}$$

$$421 - 200 = 221 \quad \text{---}$$

$$842 - 200 = 642 \quad \text{+}$$

ე.ი.ეს რიცხვია 248 ან 842.



§5. კავალიერის პრინციპი

$$4. V_{(3)} = S_{ABC} \cdot H, \quad V_{(4)} = S_{MNKF} \cdot H.$$

ე.ი. ფუძეში უნდა იყოს ჩახაზული უდიდესი ფართობის მართკუთხედი.

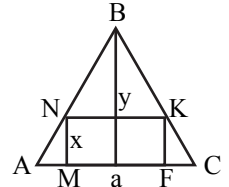
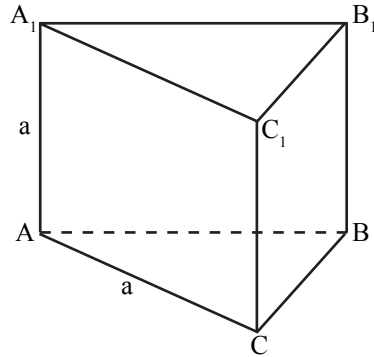
$$\frac{y}{a} = \frac{H-x}{H}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{a\sqrt{3} - 2x}{\sqrt{3}}$$

$$S = xy = \frac{-2x^2 + a\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + ax.$$

S იქნება უდიდესი x_0 -ზე $x_0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. ნარჩენის მოცულობა იქნება

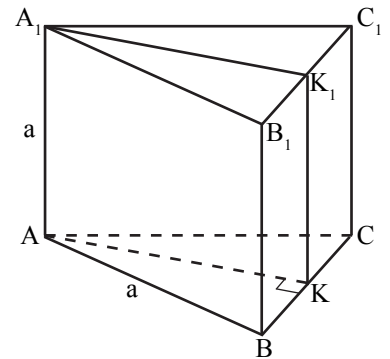
$$V_1 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \right) H = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} H = \frac{V_1}{V} \cdot 100\% = 50\%.$$



8. $AK \perp BC$. კვეთის სიბრტყეა AA_1K_1K . $S_{\Delta A_1K_1K} = 48$. $AK = AA_1$. $AK^2 = 48$. $AK = 4\sqrt{3}$.

$$\Delta ABC\text{-ში } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 8.$$

$$V = S_{\Delta} \cdot H = 192.$$



14. კვეთაა ΔBCA_1 . $A_1K \perp BC \Rightarrow AK \perp BC \Rightarrow \angle AKA_1 = 60^\circ$.

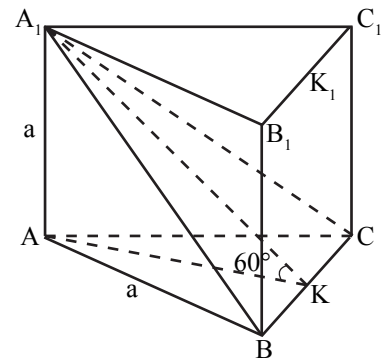
$$S_{\Delta BCA_1} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1K = 16 \quad (1).$$

$$\Delta BCA\text{-ში } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \Delta AA_1K\text{-ში } A_1K = a\sqrt{3}.$$

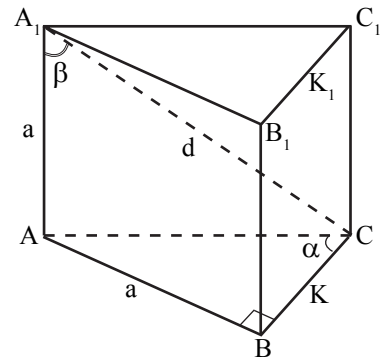
$$AA_1 = AK \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 8 \text{ და } AA_1 = 2\sqrt{2} \sqrt[4]{27}.$$

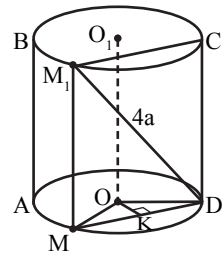
$$V = 16\sqrt{2} \sqrt[4]{27}.$$



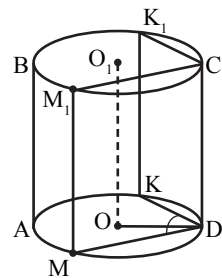
15. $\triangle AA_1C$ -შო $AC = d \sin \beta$; $AA_1 = d \cos \beta$.
 $\triangle ABC$ -შო $BC = AC \cos \alpha = d \sin \beta \cos \alpha$.
 $AB = d \sin \beta \sin \alpha$.
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d \sin \beta \cos \alpha d \sin \beta \sin \alpha = \frac{1}{4} d^2 \sin^2 \beta \sin 2\alpha$.
 $V = \frac{1}{4} d^3 \sin^2 \beta \sin 2\alpha \cos \beta$.



16. $\angle MOD = 120^\circ$. $OK \perp MD$.
 $\triangle OKD$ -შო $KD = OK \cdot \tan 60^\circ$. $KD = a\sqrt{3}$. $R = 2a$.
 $MD = 2a\sqrt{3}$.
 $\triangle MM_1D$ -შო $MM_1 = 2a$.
 $V = \pi r^2 H = 8a^2 \pi$.

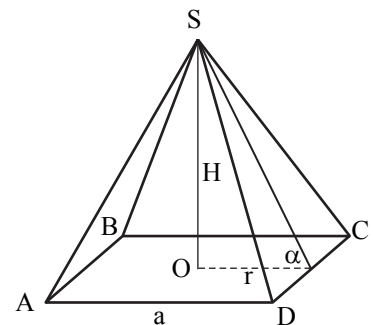


18. $\angle KDM = \alpha$. $MD \cdot H = Q$. $KD \cdot H = Q \Rightarrow KD = MD$.
 $\angle KOD = 180^\circ - \alpha$. $KD = \sqrt{2R^2 + 2R^2 \cos \alpha} = R\sqrt{2 + 2 \cos^2 \alpha}$.
 $H = \frac{Q}{KD} = \frac{Q}{R\sqrt{2 + 2 \cos^2 \alpha}}$.
 $V = \pi R^2 H = \frac{\pi R Q}{\sqrt{2 + 2 \cos^2 \alpha}}$.



6. პირამიდის მოცულობა

2. $AD = 2r$. $H + r = a$. $\tan \alpha = \frac{H}{r} \Rightarrow H = r \tan \alpha$.
 $r \tan \alpha + r = a \Rightarrow r = \frac{a}{1 + \tan \alpha} \Rightarrow H = \frac{a \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$.
 $V = \frac{1}{3} AD^2 \cdot H = \frac{4r^2}{3} \cdot H$.
 $V = \frac{4}{3} \frac{a^3 \tan \alpha}{(1 + \tan \alpha)^3}$.



3. $DK \perp SC \Rightarrow BK \perp SC$. უ.ვ. $\angle BKD = \alpha$.

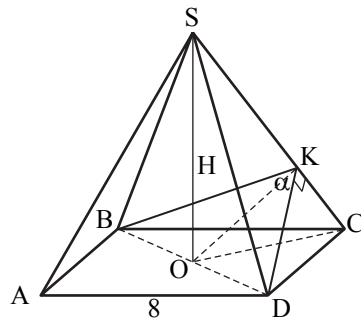
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{б}} H = \frac{64}{3} \cdot H = \frac{256}{3} \Rightarrow H = 4.$$

$$OD = 4\sqrt{2} \quad SD = 4\sqrt{3}.$$

$\triangle OSC$ -ში $OK \perp SC$ ($(BKD) \perp SC$).

$$OK = \frac{H \cdot OC}{SC} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\triangle OKD\text{-ში } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{3}. \quad \alpha = 120^\circ.$$



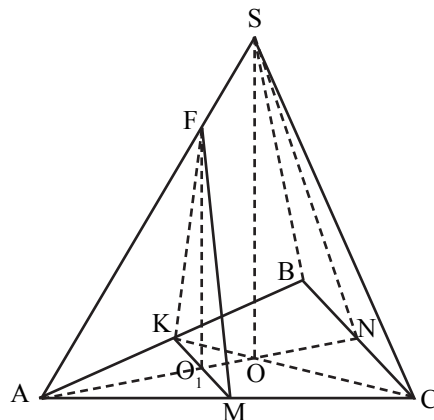
7. KM -ის შუა O_1 წერტილიდან აღვმართოთ $O_1F \perp (ABC)$.

$O_1F \parallel SO$. ამიტომ $(FKM) \perp (ABC)$.

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow H = ON \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$\triangle ASO \sim \triangle AFO_1$.

$$O_1F = \frac{a\sqrt{3}}{8}. \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{128}.$$



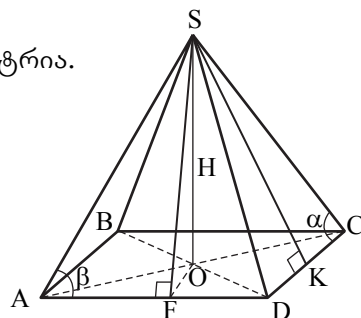
9. ($SA = SB = SC = SD$; $SO \perp ABCD$) $\Rightarrow O$ შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.

$SK \perp DC$. $\triangle ASK$ -ში $KC = l \cos \alpha \Rightarrow DC = 2l \cos \alpha$.

$SF \perp AD$. $\triangle ASF$ -ში $AF = l \cos \beta \Rightarrow AD = 2l \cos \beta$.

$$OC = l \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}. \quad H = l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

$$V = \frac{4}{3} l^3 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$



10. ($(ASB) \perp (ABC)$; $(BSC) \perp (ABC)$) $\Rightarrow SB \perp (ABC)$.

$$BC \perp CD \Rightarrow SC \perp DC \Rightarrow \angle BCS = 45^\circ.$$

ანალოგიურად $\angle SAB = 45^\circ$. ე.ი. $AB = SB = 9$.

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SB = 243.$$

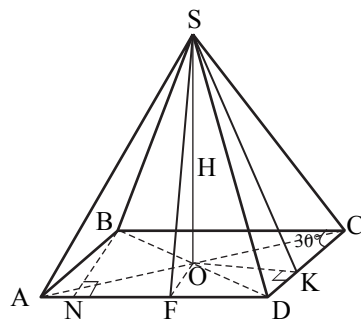
12. რადგან გვერდითი წახნაგები თანაბრად არიან დახრილები ფუძისადმი, ამიტომ სიმაღლის ფუძე ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. $OK \perp DC$, $OK = r \Rightarrow SK \perp DC \Rightarrow \angle OKS = 60^\circ$.

$$\triangle OKS\text{-ში } OS = r \operatorname{tg} 60^\circ = r\sqrt{3}.$$

განვიხილოთ $ABCD$ რომბი. $BN = 2r$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4r$.

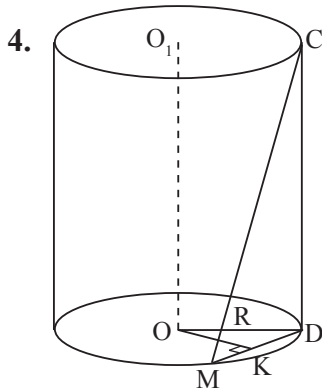
$$S_{ABCD} = 8r^2.$$

$$V = \frac{1}{3} 8r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{8r^3\sqrt{3}}{3}.$$



7. ცილინდრის ზედაპირის ფართობი

1. $R=3,8$ დმ. $500\text{ ლ}=500\text{ დმ}^3$. $V=\pi R^2 H$.



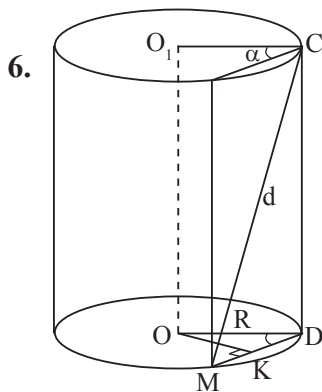
მანძილი CM და OO_1 წრფეებს შორის: დავაგეგმილთ ორივე წრფე OO_1 -ის ერთ-ერთის მართობულ სიბრტყეში — ფუძეში. OO_1 -ის გეგმილია O წერტილი, MC-სი კი MD მონაკვეთი. $OK \perp MD$. OK არის მანძილი CM და OO_1 -ს შორის. $OK=5$.

$\Delta KOD-\vartheta_0$ KD=12, MD=24.

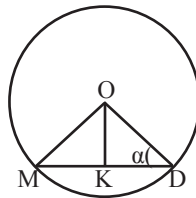
$$\Delta MCD-\text{Эн DC} = MD \operatorname{tg} 60 = 24\sqrt{3}.$$

$$S_8 = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 26\pi(13 + 24\sqrt{3}).$$

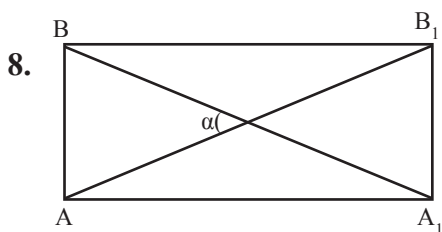
$$V = \pi R^2 H = 169 \pi \cdot 24 \sqrt{3} = 4056 \pi \sqrt{3}.$$


$$\Delta\text{CDM-}\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} \text{ H}=\mathfrak{d}\sin\beta; \text{ MD}=\mathfrak{d}\cos\beta.$$

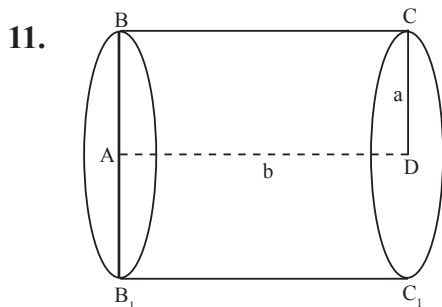
$$\Delta \text{ODK-}\vartheta_0 R = \frac{DK}{\cos \alpha} = \frac{d \cos \beta}{2 \cos \alpha}.$$



$$S_{\alpha\beta} = 2\pi R H = 2\pi \cdot \frac{d \cos \beta}{2 \cos \alpha} \cdot d \sin \beta = \frac{\pi d^2 \sin 2\beta}{\cos \alpha}.$$



$$S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{2}d^2 \sin \alpha = S_{\triangle 33}$$



I. ბრუნავს b გვერდის გარშემო. $V_1 = \pi R^2 H = \pi a^2 b$.

II. ბრუნავს a გვერდის გარშემო.

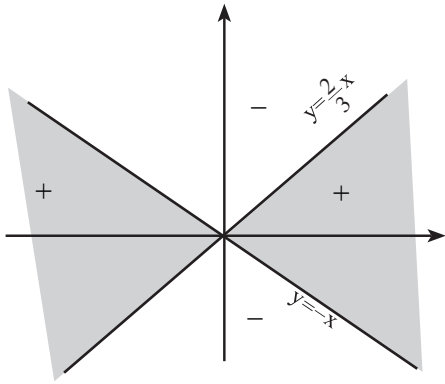
$$V_2 = \pi b^2 a.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}.$$

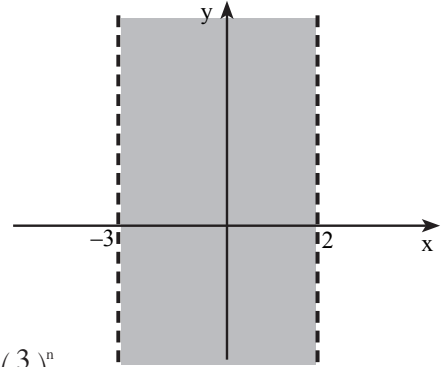
13. 3) $(x+y)(2x-3y) > 0$.

$$I_{\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}}: \begin{cases} x + y > 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x + y < 0 \\ 2x - 3y < 0 \end{cases}$$

II გზა: ავარგოთ $y+x=0$, $y=-x$ და $2x-3y=0$, $y=\frac{2}{3}x$ ფუნქციათა გრაფიკები.



სიბრტყე გაიყო ოთხ ნაწილად. განვიხილოთ $A(0;2)$. ჩავსვათ უტოლობაში $(0+2)(0-6) < 0$. სიბრტყის იმ ნაწილში, რომელშიც ეს წერტილია მოთავსებული. დავწეროთ ნიშანი „-“. მომდევნო შუალედებში ნიშნები ვცვალთ. „+“-იანი შუალედები დავშტრიხთ — ამ შუალედის ყოველი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს უტოლობას.



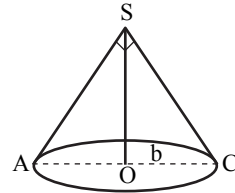
დ) $x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

14. ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-5)(0,3-n)}{3n^2-1} = \frac{-2}{3}$; ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+3^n}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1} = 0$

8. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი

1. $\angle ASC = 90^\circ$ — და $AC = 12 \Rightarrow H = R = 6\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6\sqrt{2}$.

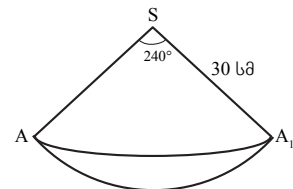
$S_{\text{გ}} = \pi R \ell + \pi R^2 = 36\pi\sqrt{2} + 36\pi = 36\pi(\sqrt{2} + 1)$.



3. $S_{\text{ASA}_1} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 900}{360^\circ} \cdot 240^\circ = 600\pi (\text{სმ}^2) = S_{\text{გ3}}$.

$\ell_{\text{AA}_1} = \frac{\pi r}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{30\pi}{180^\circ} \cdot 240^\circ = 40\pi (\text{სმ})$.

$2\pi R = 40\pi \Rightarrow R = 20$.



$S_{\text{გ}} = 600\pi + 400\pi = 1000\pi (\text{სმ}^2) = 10\pi \text{ დმ}^2$.

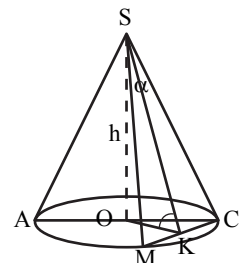
$H = \sqrt{e^2 + R^2} = \sqrt{30^2 - 20^2} = 10\sqrt{5}$

$V = \frac{1}{3} 400\pi \cdot 10\sqrt{5} = \frac{4000\sqrt{5}}{3} \pi (\text{სმ}^3) = \frac{4}{3} \sqrt{5} \pi (\text{დმ}^3)$.

6. $SK \perp MC \Rightarrow OK \perp MC \Rightarrow \angle OKS = \beta$.

ΔSOK — ში $OK = h \operatorname{ctg} \beta$, $SK = \frac{h}{\sin \beta}$

ΔMSK — ში $MK = SK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta}$



$$\Delta OKC-\text{მონ } R = \sqrt{OK^2 + KC^2} = \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + \frac{h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \beta}} = h \sqrt{\frac{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \beta}} = \frac{h}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

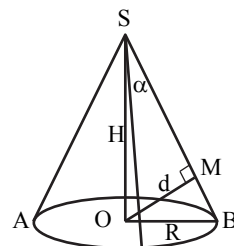
$$V = \pi \cdot \frac{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2 \beta} h^3.$$

10. $\Delta SOM-\text{მონ } H = \frac{d}{\sin \alpha}$

$$\Delta SOB-\text{მონ } SB = \ell = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

$$R = \ell \sin \alpha = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

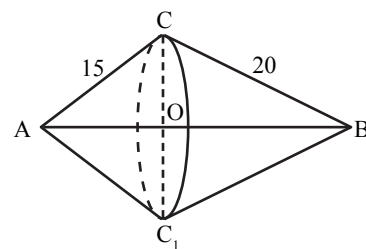
$$S_{\text{ბ}} = \pi R^2 + \pi R \ell = \frac{\pi d^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{\pi d^2}{\cos^2 \alpha \sin \alpha} = \frac{\pi d^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + 1}{\sin \alpha}.$$



14. $CO = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$

$$V_{\text{ბრ}} = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 H_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 H_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 (H_1 + H_2) = \frac{1}{3} \pi \cdot OC^2 \cdot AB =$$

$$= \frac{\pi \cdot 144 \cdot 25}{3} = 1200\pi$$



15. $V_{\text{ბრ}} = V_{\text{ცოლ.}} - 2V_{\text{კონ.}}$

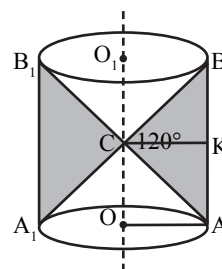
$$V_{\text{ცოლ.}} = V_{\text{ABB1A1}} = \pi R^2 H.$$

$$\Delta COA-\text{მონ } OA = CK = 8 \operatorname{tg} 30 = \frac{8}{\sqrt{3}} = R.$$

$$V_{\text{ცოლ.}} = \frac{64}{3} \pi \cdot 16 = \frac{16 \cdot 64}{3} \pi.$$

$$V_{\text{კონ.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{64}{3} \cdot 8, h = KB = 8.$$

$$V_{\text{ბრ.}} = V_{\text{ცოლ.}} - 2V_{\text{კონ.}} = \frac{16 \cdot 64 \pi}{3} - \frac{16 \cdot 64 \pi}{9} = \frac{32 \cdot 64 \pi}{9} = \frac{2048 \pi}{9}.$$



23. $f(x) = 2x + 5. \quad g(x) = 2^x.$

$$\text{ა) } \begin{cases} f(f(x)) = f(2x + 5) = f(t) = 2t + 5 = 2(2x + 5) + 5 = 4x + 15 \\ 2x + 5 \equiv t \end{cases}$$

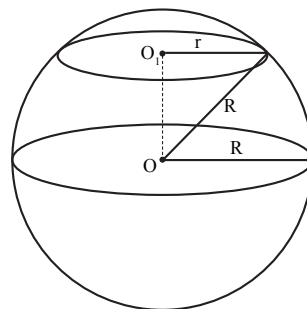
24. $f(-1) = f(3) = 0$

ა) $y = f(x - 2)$ -ის ნულები იქნება $-1 + 2 = 1$ და $3 + 2 = 5$.

$$\text{ბ) } \begin{cases} y = f(2x - 3) \\ 2x - 3 \equiv t \end{cases} \quad f(t) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t = -1 \\ t = 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 3 = -1 \\ 2x - 3 = 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = 3 \end{matrix}.$$

9. პირთვის ზედაპირი და მოცულობა

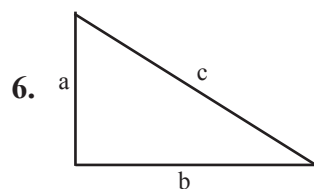
2. $OO_1=12\text{ სმ.}$ $\pi r^2=25\pi \Rightarrow r^2=25.$
 ΔOO_1K -ში $R^2=OO_1^2+r^2=144+25.$
 $R=13.$ $S_{\text{ზედა.}}=4\pi R^2=676\pi.$



3. $V_{\text{ც}}=\pi r^2 H.$ $r=20^3\sqrt{\frac{2}{3}}.$ $H=2r.$

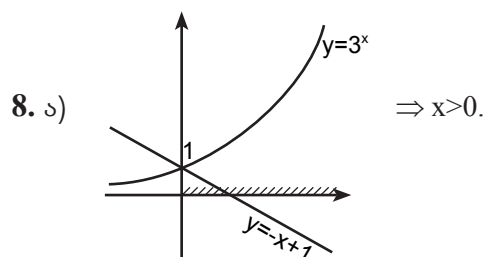
$V_{\text{ც}}=\pi r^2 \cdot 2r=2\pi r^3=2\pi \cdot 20^3 \cdot \frac{2}{3}.$

$V_{\text{ს}}=\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi \cdot 20^3 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow R = 20.$



$S_1=4\pi \frac{a^2}{4}=\pi a^2;$ $S_2=\pi b^2;$ $S_3=\pi c^2$

$S_3=S_1+S_2.$



9. ს) $x(m-1) = m^2-1.$

1. $\begin{cases} m \neq 1 \\ x=m+1 \end{cases};$ 2. $\begin{cases} m=1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

თავი II

1. ალბათობის თეორიის ელემენტები

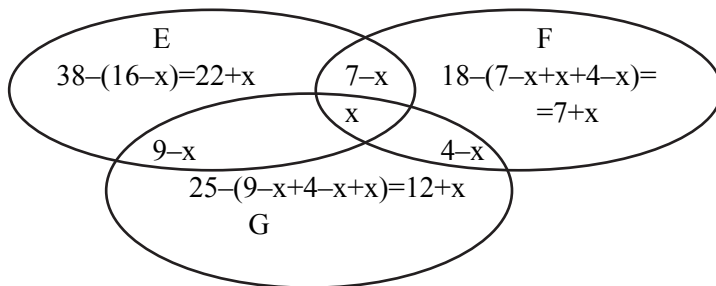
ამოხსნები, მითითებები:

1. გ) ე.ი. თეთრი არ არის $P(\text{ფერადია}) = 1 - \frac{3}{23} = \frac{20}{23}$ ან ასეც: $P(\text{ფერადი}) = P(წ) + P(ყვ) + P(მწვ) = \frac{7}{23} + \frac{4}{23} + \frac{9}{23} = \frac{20}{23}$.

2. ა) $P(4 \text{ ან } 6) = P(4) + P(6) - P(12) = \frac{50}{200} + \frac{33}{200} - \frac{16}{200} = \frac{67}{200}$.

გ) $P(6 \text{ ან } 8) = P(6) + P(8) - P(24) = \frac{33}{200} + \frac{25}{200} - \frac{8}{200} = \frac{1}{4}$.

3.

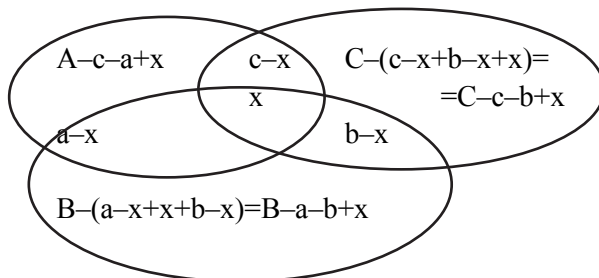


$$38 + 7 + x + 4 - x + 12 + x = 61 + x.$$

$$61 + x = 65 \Rightarrow x = 4.$$

5. ა) $N(A \cup B \cup C) = N((A \cup B) \cup C) = N(A \cup B) + N(C) - N((A \cup B) \cap C) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) + N(C) - N((A \cap C) \cup (B \cap C)) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$

ან ასეც:



$$N(A) \equiv A$$

$$N(B) \equiv B$$

$$N(C) \equiv C$$

$$N(A \cap B) = a$$

$$N(A \cap C) = c$$

$$N(B \cap C) = b$$

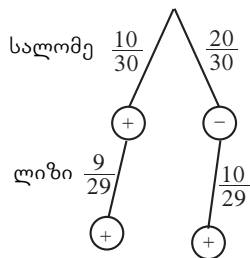
$$N(A \cup B \cup C) = A - c - a + x + C - c - b + x + B - a - b + x + a - x + c - x + b - x + x = A + C + B - c - a - b + x = N(A) + N(B) + N(C) - N(B \cap C) - N(A \cap B) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C). \text{ რ.დ.გ.}$$

6. $P(A) = \frac{18}{36}$ $P(B) = \frac{4}{36}$

ა) „AB“ — „ამოღებული კარტი შავი ტუზია“. $P(AB) = \frac{2}{36}$; ბ) $P(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36}$.

7. $P(C) = \frac{10}{30}$.

$P(C)$ იმ პირობით, რომ სალომემ უკვე ამოიღო ბილეთი (ან მომგებიანი ან არამომგებიანი).



$$P_A(\text{ლ}) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} + \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{10}{30}.$$

ე.ი. ალბათობები ტოლია — მოგების შანსი ერთნაირი არის.

9. პირველი ხარისხის დეტალი იქნება $90\% \cdot \frac{80}{100} = 72\%$.

$$P(I_b) = \frac{72}{100}.$$

10. $P(s;1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (დამოუკიდებელი ხდომილობებია).

11. ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ არ არის არც ერთი კამერა ჩართული.

$$P(\text{არც ერთი}) = 0,4^3.$$

$$P(\text{ერთი მაინც}) = 1 - 0,4^3 = 0,936.$$

14. ბოლო ციფრის არჩევის ორი ვარიანტია: 4 ან 2. $P = \frac{m}{n}$.

ა) $m = P_4 \cdot C_2^1 = 4!2$ ან ასეც:

I	II	III	IV	V	სულ
4	3	2	1	2	$4! \cdot 2$

$$P = \frac{P_4 C_2^1}{P_5} = \frac{4!2}{5!} = \frac{2}{5}$$

ბ) $m = \overline{A_5^4} \cdot C_2^1 = 5^4 \cdot 2, n = \overline{A_5^5}.$

$$P = \frac{\overline{A_5^4} C_2^1}{\overline{A_5^5}} = \frac{5^4 \cdot 2}{5^5} = \frac{2}{5}$$

ან ასეც:

	I	II	III	IV	V	სულ
m	5	5	5	5	2	$5^4 \cdot 2$
n	5	5	5	5	5	5^5

15. $\frac{2}{9}$ (გ) $\frac{3}{8}$ (ა) $\frac{2}{7}$ (დ) $\frac{2}{6}$ (ა) $\frac{1}{5}$ (გ) $\frac{1}{4}$ (დ) $\frac{1}{3}$ (ე) $\frac{1}{2}$ (ბ) 1 (ა)

$$P = \frac{24}{9!} \quad \text{ან ასეც: } P = \frac{m}{n}. \quad m=1. \quad n = \frac{9!}{2!3!2!} = \frac{24!}{9}.$$

რადგან „ა“ მეორდება 3-ჯერ, „გ“ — 2-ჯერ და „დ“ — 2-ჯერ $P = \frac{24}{9!}.$

16. ა) A „უფროსი შვილი ვაჟია“. B. „უმცროსი შვილი ვაჟია“.

$$\text{უ.ვ. } P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{რადგან } P(AB) = \frac{1}{4} \quad \Omega = \{\text{ვვ; ვქ; ქვ; ქქ}\}$$

ბ) ალბათობა იმისა, რომ ორივე ვაჭია იმ პირობით, რომ $P_{A \cup B}(A \cap B)$.

$$\text{პირობითი ალბათობის ფორმულით: } P_{A \cup B}(A \cap B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

$$17. P = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$$

$$18. P = \frac{V_{KABC}}{V_{SABC}} = \frac{S_{ACD} \cdot OK}{S_{ABCD} \cdot SO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$19. P = \frac{m}{n} \quad \text{ა) } n = C_{36}^4; \quad m = C_4^1 \cdot C_{32}^3.$$

$$P = \frac{C_4^1 C_{32}^3}{C_{36}^4}.$$

$$22. P = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3}.$$

23. ლუწი ციფრებით შედგენილი რაოდენობა:

1	2	3	4	5	6	სულ
4	5	5	5	5	5	$5^5 \cdot 4$

ექვსნიშნა რიცხვების რაოდენობა:

1	2	3	4	5	6	სულ
9	10	10	10	10	10	$10^5 \cdot 9$

$$P = \frac{m}{n}, \quad m = 5^5 \cdot 4, \quad n = 9 \cdot 10^5.$$

$$P = \frac{5^5 \cdot 4}{10^5 \cdot 9} = \frac{1}{72}.$$

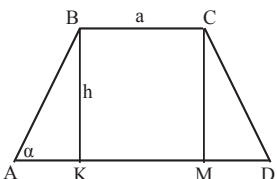
24. სამი ბავშვი ჩავთვალოთ ერთად. ე.ი. არსებობს მათი დალაგების P_5 ვარიანტი. მაგრამ მოცემული სამი რომ გვერდიგვერდ აღმოჩნდეს, ასევე შესაძლებლობა სულ P_3 -ია. ე.ი. სულ იქნება $P_3 \cdot P_5$.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{P_3 P_5}{P_7} = \frac{3! 5!}{7!} = \frac{3!}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

25. A_1 : „ჩააბარა I“. A_2 : „ჩააბარა II“. A_3 : „ჩააბარა III“.

$$P = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994. \quad (\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3} \text{ დამოუკიდებელი ხდომილობებია}).$$

27.



$$P = \frac{2S_{\triangle ABK}}{S_{ABCD}}. \quad \triangle ABK \text{-ში } AK = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad KD = a + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{ABCD} = h \left(a + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \right). \quad P = \frac{\frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha h (a + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha})} = \frac{h}{a \operatorname{tg} \alpha + h}.$$

2. ბერნულის ფორმულა

ამოხსნები, მითითებები:

$$1. \text{ ა) } P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \quad \text{დ) } P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

$$2. \text{ ა) } P_{10}(2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^9.$$

4. რადგან თანაბარი სიძლიერისანი არიან, ამიტომ მოგების ალბათობა $P = \frac{1}{2}$.

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}.$$

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

პასუხი: 4 თამაშიდან 2-ის მოგება.

$$5. \text{ დ) } P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{8!}{5!3!} \left(\frac{4}{36}\right)^5 \cdot \left(\frac{32}{36}\right)^3 = \frac{7 \cdot 8^4}{9^8}.$$

$$9. P_3(0) = 1 - 0,784 = 0,216.$$

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 \Rightarrow q^3 = 0,216, \quad q = 0,6.$$

$$P = 1 - q = 0,4.$$

$$10. \begin{array}{c} \text{A} \quad \xrightarrow{2x} \quad \text{C} \quad \xrightarrow{x} \quad \text{B} \end{array} \quad \text{AC-ზე მოხვედრის ალბათობა იყოს } p.$$

$$P = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{81} = \frac{8}{27}.$$

$$11. \begin{array}{c} \text{A} \quad \xrightarrow{x} \quad \text{B} \end{array} \quad P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{a-x}{a}\right)^3.$$

$$14. \text{ ა) } 2a_2 = a_1 + a_3;$$

$$2\lg(9^x + 3) = \lg 4 + \lg(9^x + 11) \Leftrightarrow \lg(9^x + 3)^2 = \lg(4 \cdot 9^x + 44) \Leftrightarrow 9^{2x} + 2 \cdot 9^x - 35 = 0 \Leftrightarrow 9^x = -1 \pm 6.$$

$$9^x = 5. \quad x = \lg_9 5 \quad x = \lg_3 \sqrt{5}.$$

$$15. \text{ ა) } A \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{5730} = \frac{A}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{5730}} \approx 0,89.$$

$$1000 \text{ წელიწადში დაიკლებს } \left(A - A \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{1000}\right) \approx 0,11A.$$

$$\frac{0,11A}{A} \cdot 100 = 11\% - \text{ით.}$$

$$16. \text{ ა) } y = A \left(1 - \frac{40}{100}\right)^x.$$

$$y(1) = 3000 \quad A \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 3000 \Rightarrow A = 5000.$$

$$\text{ბ) } A \left(1 - \frac{2}{5}\right)^x = \frac{A}{2} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{1}{2} \quad x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{1}{2} = \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg 3} \approx \frac{0,3}{0,7 - 0,5} \approx 1,5.$$

3. სტატისტიკის ელემენტები

9. $x(0;y;0)$. $AX=BX$.

$$(0-2)^2+(y+1)^2+(0-1)^2=(0-0)^2+(y-1)^2+(0-3)^2$$

$$4 + y^2 + 2y + 1 + 1 = y^2 - 2y + 1 + 9$$

$$4y=4 \Rightarrow y=1. \text{ ე.ი. } X(0;1;0).$$

10. განვიხილოთ $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორები, რომლებიც მოდებულია 0 წერტილში და $\vec{i}(1;0;0); \vec{j}(0;1;0); \vec{k}(0;0;1) | \vec{i} | = | \vec{j} | = | \vec{k} | = 1$.

$$\vec{i} \cdot \vec{a} = | \vec{i} | | \vec{a} | \cos \alpha \Rightarrow x = | a | \cos \alpha$$

$$\vec{j} \cdot \vec{a} = | \vec{j} | | \vec{a} | \cos \beta \Rightarrow y = | a | \cos \beta$$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = | \vec{k} | | \vec{a} | \cos \gamma \Rightarrow z = | a | \cos \gamma. \text{ რ.დ.გ.}$$

11. ა) მიღებული პარაბოლას წვერო იქნება $(1;-2)$ წერტილი, ე.ი. $y=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$.

ბ) მოცემული პარაბოლას წვეროა $(1;-9)$. მიღებული იქნება $x_0=1+1=2$ და $y_0=-9-2=-11$.
 $(2;-11)$ წერტილი. ე.ი. $y=(x-2)^2-11=x^2-4x-7$.

$$\text{გ) } x_0=2; y_0=9 \quad (2;9).$$

$$(2;9) \rightarrow (3;7). \quad y=-2(x-3)^2+7=-2x^2+12x-11.$$

4. კომბინაციისა და პერმუტაციის კომპოზიციენტები

$$6. \text{ ა) } n=2k, \text{ მაშინ } [k] + \left[k + \frac{1}{2} \right] = 2k = n.$$

$$k+k=2k. \quad \text{ჭ.}$$

$$\text{ბ) } n=2k+1, \text{ მივიღებთ } \left[k + \frac{1}{2} \right] + [k+1] = k+k+1=2k+1=n. \text{ რ.დ.გ.}$$

$$8. \text{ I. } S_1 = -1. \quad (-1)^1 \left[\frac{1+1}{2} \right] = -1. \quad \text{ჭ.}$$

$$\text{II. ა) ვთქვათ, } S_{2k} = (-1)^{2k} \left[\frac{2k+1}{2} \right] = \left[\frac{2k+1}{2} \right] = k, \text{ უ.დ. } S_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \left[\frac{2k+2}{2} \right] = -(k+1).$$

$$S_{2k+1} = S_{2k} - (2k+1) = k - 2k - 1 = -(k+1). \text{ რ.დ.გ.}$$

$$\text{ბ) ვთქვათ, } S_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \left[\frac{2k+2}{2} \right] = -(k+1), \text{ უ.დ. } S_{2k+2} = (-1)^{2k+2} \left[\frac{2k+3}{2} \right] = (k+1).$$

$$S_{2k+2} = S_{2k+1} + (2k+2) = -(k+1) + 2k+2 = k+1. \text{ რ.დ.გ.}$$

9. ა) თუ $n=1$, მაშინ $2 > 2+1$ მცდარია.

ე.ი. დასამტკიცებელი უტოლობა არ არის მართებული $n \in \mathbb{N}$ -თვის.

ბ) თუ $n=2$, $2^2 > 2 \cdot 2 + 1$ მცდარია;

თუ $n=3$, $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ ჭეშმარიტია;

თუ $n=4$, $2^4 > 2 \cdot 4 + 1$ ჭეშმარიტია.

დავამტკიცოთ უტოლობის ჭეშმარიტება $n \geq 3$ -თვის.

I. როგორც ვნახეთ, $n=3$ -თვის წინადადება მართებულია.

II. ვთქვათ $2^k > 2k+1$, უ.დ. $2^{k+1} > 2(k+1)+1=2k+3$.

$$2^k > 2k+1 \quad | \cdot 2 \quad \text{მივიღებთ, } 2^{k+1} > 2k+2k+2 > 2k+3. \text{ რ.დ.გ.}$$

თავი III
§1. რაციონალური რიცხვები

10. ა) 5-ით; ბ) 5; გ) 0-ით (არის 2·5);
დ) $6 \cdot 7 + 8 = \dots 0$; ე) $8 \cdot 4 - 7 = \dots 5$; ვ) $6 \cdot 7 - 2 = \dots 0$.

13. ა) გამყოფებია: 1, 2, 3, 6, 9, 18, ე.ი. 6 გამყოფი აქვს

14. ა) ლუწი; ბ) კენტი ან ლუწი.

15. უ.ს.ჯ. $(6; 8; 12) = 24$ სთ-ში.

16. $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $135 = 3^3 \cdot 5$ | საერთო გამყოფებია: 1, 3, 5, 3^2 , 15, 45.

ე.ი. საჩუქრები შესაძლოა გაუნაწილდეს:

- 1) 3 მოსწავლეს. თითოს $\begin{cases} 30 \text{ შოკოლადი} \\ 60 \text{ მანდარინი} \\ 45 \text{ ჩურჩხელა} \end{cases}$

- 2) 5 მოსწავლეს. თითოს $\begin{cases} 18 \text{ შოკოლადი} \\ 36 \text{ მანდარინი} \\ 27 \text{ ჩურჩხელა} \end{cases}$

- 3) 9 მოსწავლეს. 4) 15 მოსწავლეს. 5) 45 მოსწავლეს.

25. ცხადია, $p \neq 3$; თუ $p=3$, მაშინ 3; 13; 17 მარტივი რიცხვებია. განვიხილოთ $p > 3$. მაშინ $p=6n+1$.

1) $p=6n+1$ $p+10=6n+11$, $p+14=6n+15=3(2n+3)$ არ არის მარტივი,

2) $p=6n-1$ $p+10=6n+9=3(2n+3)$ არ არის მარტივი, ე.ი. $p=3$.

26. $237^{231} + 732^{132}$ $(732:3 \quad 237:3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(37^{231} + 732^{132}):3$.
ე.ი. შედგენილია.

27. შესაძლო ნაშთთა ჯამია $1 + 2 + 3 + \dots + 2000 = \frac{1 + 2000}{2} \cdot 2000 = 2001 \cdot 1000$.

28. $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+2)(n+1)$ სამი მომდევნო რიცხვიდან ერთი აუცილებლად ლუწია, ერთი კი 3-ის ჯერადი.

31. $a=7n+3$; $b=7k+6$.

დ) $(2a-5b)$ -ს 7-ზე გაყოფის ნაშთია $2 \cdot 3 - 5 \cdot 6 = -24 = -28 + 4$, ე.ი. $r=4$.

33. a გაიყოფა უ.ს.ჯ. $(18;30)=90$.

a აუცილებლად გაიყოფა 90-ის ყველა გამყოფზე.

34. $100!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$.

ნულით დაბოლოებულ რიცხვს იძლევა ნამრავლი 2·5. ცხადია, უნდა დავითვალოთ 5-ების რაოდენობა. 1-დან 100-ის ჩათვლით არის 5-ის ჯერადი 20 რიცხვი; მაგრამ 25, 50, 75, 100 დაშლაში შეიცავს ორ 5-იანს და გვექნება კიდევ 4 ხუთიანი, ე.ი. სულ გვექნება 24 ნული.

35. თუ $A=mn \Rightarrow A:m$ და $A:n$. ე.ი. A რიცხვის ყოველ m გამყოფს გააჩნია მისი მეწყვილე n რიცხვი — ისეთი, რომ შესრულდება $mn=A$. ე.ი. თუ A არ არის სრული კვადრატია, მისი გამყოფების რაოდენობა ლუწია. თუ A სრული კვადრატია, მისი გამყოფების რაოდენობა კენტია. მაგალითად: $36 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$.

↑

36. ა) $10!+49=1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 10+49$. I შესაკრები იყოფა 42-ზე. ე.ი. ნაშთია 7.

39.
$$\begin{cases} a = 12n + 11 \\ a = 18k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 12n + 11 = 18k + 1 \Leftrightarrow 12n = 18k - 10 \Leftrightarrow 9k - 6n = 5.$$

$(9k-6n):3$, მაგრამ 5 არ იყოფა 3-ზე. ე.ი. განტოლებას მთელ რიცხვებში ამონახსნი არ აქვს. ასეთი a რიცხვი არ არსებობს,

40. ბ) $x(x+3y)=12$. $12=1 \cdot 12=2 \cdot 6=3 \cdot 4$.

1) $\begin{cases} x = 1 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$.

ნატურალურ რიცხვებში ამონახსენი არ აქვს.

41. ა) $3x+2y=7 \Leftrightarrow y = \frac{-3x+7}{2} \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$

დ) $x^2-xy-x+y=1 \Leftrightarrow (x-y)(x-1)=1$.
(2;1) (0;1)

ზ) $3xy+2x+3y=0 \Leftrightarrow x(3y+2)+(3y+2)-2=0 \Leftrightarrow (3y+2)(x+1)=2$.

ყველა შემთხვევის განხილვის შემდეგ პასუხებია: (0;0); (-3;-1).

42. ა) პერიოდში სამი ციფრია, ამიტომ: $2008:3=\dots(1)$. ე.ი. სამიბეული ციფრია 3.

45. გ) $(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\dots+(97+98-99-100)=-4 \cdot 25=-100$.

47. ა) $\frac{637637}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{91091}{11 \cdot 13} = \frac{7007}{11} = 637$.

49. ა) $xy(x+y)+yz(y-z)-xz(x+z)=x^2y+xy^2+y^2z-yz^2-x^2z-xz^2=x^2(y-z)+yz(y-z)+x(y^2-z^2)=$
 $= (y-z)(x^2+yz+xy+xz)=(y-z)(x+y)(x+z)$.

50. $x+y=6 \Rightarrow x^2+2xy+y^2=36 \Rightarrow x^2+y^2=2(18-xy)$. რ.დ.გ.

51. $5x-3y=0 \Rightarrow 25x^2-30xy+9y^2=0$.

ა) $25x^2+9y^2+70x-42y-30xy-1=(25x^2+9y^2-30xy)+14(5x-3y)-1=-1$.

$$53. \quad \text{ს) } \frac{3x-5}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}; \quad a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$3x-5=ax-a+b.$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$56. \quad \text{ს) } \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2(n+1)-5}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1}$$

$$\text{უ.ო. } 5:(n+1) \Rightarrow n+1 = 1; -1; 5; -5, \quad \text{უ.ო. } n = 0; -2; 4; -6. \\ n = 4.$$

§2. ირაციონალური რიცხვი

$$3. \quad \text{ბ) } \begin{cases} {}^4\sqrt{32a^7} = 2a^4\sqrt{2a^3}; \\ a \geq 0 \end{cases}; \quad \text{ბ) } \begin{cases} {}^4\sqrt{-32a^{13}} = -2a^3\sqrt[4]{-2a}. \\ a \leq 0 \end{cases}.$$

$$4. \quad \text{ფ) } \begin{cases} a^3\sqrt{-a^5} = -\sqrt{-a^{11}}. \\ a \leq 0 \end{cases}.$$

$$5. \quad \text{ფ) } \sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 5 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 4.$$

$$6. \quad \text{ფ) } \frac{4}{2-\sqrt{3}} - 15 = 8 + 4\sqrt{3} - 15 = \sqrt{48} - \sqrt{49} < 0 \Rightarrow \frac{4}{2-\sqrt{3}} < 15.$$

$$7. \quad \left. \begin{array}{l} 0,7 = \sqrt{0,49} \\ \sqrt{0,5} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{0,(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < 0,7 < \sqrt{0,5}.$$

$$8. \quad \text{პ) } \frac{5}{(2-\sqrt{5})+\sqrt{2}} = \frac{5(2-\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{5})^2-2} = \frac{5(2-\sqrt{5}-\sqrt{2})}{7-4\sqrt{5}} = \frac{5(2-\sqrt{5}-\sqrt{2})(7+4\sqrt{5})}{49-80}.$$

$$16. \quad \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot {}^4\sqrt{5-2\sqrt{6}} = {}^4\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot {}^4\sqrt{5-2\sqrt{6}} = {}^4\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot {}^4\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 1.$$

$$18. \quad \sqrt{(4+\sqrt{15})^2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = \\ = \sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot 2 = 2$$

§3. პროპორცია. პროცენტი

2. ა) $a:b:c = \frac{5}{3}:\frac{11}{6}:\frac{5}{12} = 20:22:5$ $a = 20x$, $b = 22x$, $c = 5x$
 $47x = 940$ $x = 20 \Rightarrow a = 400$; $b = 440$; $c = 100$.

4.
$$\left. \begin{array}{l} \frac{22}{5} \text{ სთ} \rightarrow \frac{11}{15} \text{ ნაწ.} \\ \frac{9}{10} \text{ სთ} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია.}$$

$x = 0,15$ ნაწ.

5.
$$\left(\begin{array}{l} \frac{11}{21} \text{ ნაწ.} \rightarrow \frac{11}{2} \text{ სთ} \\ 1 \rightarrow x \end{array} \right) x = \frac{21}{2} \text{ სთ} \quad \left(\begin{array}{l} \frac{4}{15} \text{ ნაწ.} \rightarrow \frac{8}{3} \text{ სთ} \\ 1 \rightarrow y \end{array} \right) y = 10 \text{ სთ}$$

მეორე ასრულებს 0,5 სთ-ით სწრაფად.

7. მარცვლეულს უჭირავს $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ ნაწ., რაც 1080 ჰა-ა. სულ იქნება $1080 \cdot \frac{20}{9} = 2400$ ჰა.

9. ხილი იყიდა თანხის $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ ნაწილით. დარჩა 12 ლარი.

11. $a = \frac{3}{5}b \Rightarrow b = \frac{5}{3}a$. ე.ი. $\frac{5}{3}$ ნაწილია.

14. ა) $3 \text{ კმ/სთ} = \frac{3000 \text{ მ}}{3600 \text{ წმ}} = \frac{5}{6} \text{ მ/წმ}$.

25. ა) გაძვირდა 1,6 ლარით, ე.ი. 25%-ით.
 ბ) გაიაფდეს 1,6 ლარით, ე.ი. 8-ის 20%-ით.

28. ღირდა 100%. გახდა 110%, კიდევ გაძვირდა და გახდა 110%-ის 115% $= \frac{110 \cdot 115}{100} \% = \frac{1265}{10} \%$.

გაიაფთა 10%-ით. ე.ი. გახდა $\frac{1265}{10} \% - \text{ის } 90\% = \frac{1265 \cdot 90}{1000} \%$,

ახლა ღირს $\frac{120 \cdot 1265 \cdot 90}{1000} = 136,62$ ლარი.

30. ვთქვათ, იყო სულ x მოსწავლე და მონაწილეობა მიიღო A მოსწავლემ, ე.ი.

$$\frac{96,8x}{100} < A < \frac{97,2x}{100}$$

$$\frac{121}{125}x < A < \frac{243}{250}x \Rightarrow (x:125 \text{ და } x:250), \text{ ე.ი. } x=250.$$

31. 1 სთ-ის შემდეგ: $\frac{1000 \cdot 111}{100} - 120 = 1110 - 120 = 990$ (ბაქტერია).

ბაქტერიათა რაოდენობა მცირდება. ე.ი. არა.

33. გვაქვს რთული პროცენტი: $1000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = 1000 \cdot \frac{11^3}{10^3} = 1331$ ლარი.

35. 1) $1000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^6 = 1000 \cdot \left(\frac{112}{100}\right)^6 \approx 1974$ ლარი.

2) რადგან ყოველწლიურად გამოაქვს ნამატი პროცენტი, ბანკში იდება ისევ 1000 ლარი, ამიტომ მეანაბრე საბოლოოდ აიღებს თანხას მარტივი პროცენტით $1000\left(1 + \frac{15 \cdot 6}{100}\right) = 1900$ ლარი.
ე.ი. პირველი ვარიანტი სჯობს.

41. ბალახში 30% უწყლო მასაა. ვთქვათ, უნდა მოითიბოს x კგ ბალახი. მასში $\frac{3x}{10}$ კგ უწყლო მასაა, რაც შენარჩუნდება.

$$\frac{3}{10}x = \frac{600 \cdot 84}{100} \Rightarrow x = 1680 \text{ კგ.}$$

49. 800 გრ — 45%
1200 გრ — 20%

$$p\% = \frac{800 \cdot 45 + 1200 \cdot 20}{2000}.$$

2000 გრ — $p\%$

$p=30\%$.

51. 1) $x \rightarrow 40\%$

$y \rightarrow 60\%$

$5 \rightarrow 0\%$

$x+y+5 \rightarrow 20\%$

2) $x \rightarrow 40\%$

$y \rightarrow 60\%$

$5 \rightarrow 80\%$

$x+y+5 \rightarrow 70\%$

მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{40x + 60y + 0 \cdot 5}{x + y + 5} = 20 \\ \frac{40x + 60y + 400}{x + y + 5} = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 5 \\ 4x + 6y + 40 = 7x + 7y + 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

54. ერთი პურის ფასი — x ; რაოდენობა — y ; მთლიანი თანხა — xy ლარი.

გახდა ერთი პურის ფასი — $1,25x$; მთლიანი თანხა — $0,8xy$ ლარი. რაოდენობა: $\frac{0,8xy}{1,25x} = \frac{16}{25}y$.
 $\frac{25}{16}$ -ჯერ.

55. ვთქვათ, x კგ სოკოსგან მიიღება y კგ გამომშრალი სოკო.

უწყლო მასა იქნება $\frac{3}{10}x = \frac{9}{10}y \Rightarrow x = 3y$.

$$\text{უ.ვ. } \frac{x-y}{x} \cdot 100\% = \frac{3y-y}{3y} \cdot 100\% = \frac{200}{3}\%.$$

57. ქალები x , მამაკაცები — $4x$. არჩევნებში მონაწილეობა მიიღო $2x$ მამაკაცმა და $0,6x$ ქალმა.

სულ $2x + \frac{3}{5}x = \frac{13}{5}x$ ადამიანმა, რაც იქნება საერთო რაოდენობის 65%.

59. ა) ვთქვათ, თავდაპირველად იყო x ადამიანი, აქედან $0,25x$ მამაკაცი და $0,75x$ ქალი. მოვიდა 30 ქალი, გახდა $x+30$ ადამიანი და $0,75x+30$ ქალი.

$$\text{მივიღეთ } \frac{0,25x}{x+30} \cdot 100 = 20 \Rightarrow x = 120,$$

ახლა მუშაობს $120 \cdot 0,75 + 30 = 120$ ქალი.

§4. სიმრავლე

2. არა.

3. $N(A \times B) = mn$.

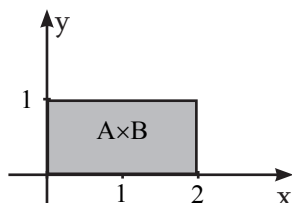
4. ბ) $A \times A \times A = \{(1;1;1), (1;1;2), (1;1;3), (1;2;1), (1;2;2), (1;2;3) \dots (3;3;3)\}$ სულ 27 ელემენტი.

5. $(1;1), (1;2) \dots (1;6)$
 $(2;1), (2;2) \dots (2;6)$
 $\dots \dots \dots$
 $(6;1), (6;2) \dots (6;6)$

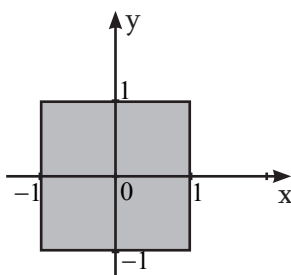
6. სულ $6^3 = 216$.

7. სულ 12 გზა. $(a;m), (a;n), (a;k), (a;p)$
 $(b;m) \dots \dots \dots (b;p)$
 $(c;m) \dots \dots \dots (c;p)$

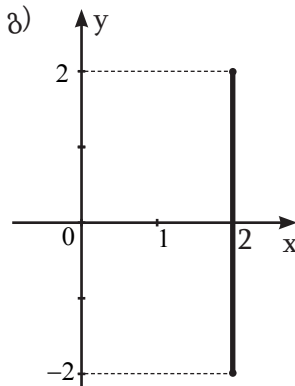
8. ა)



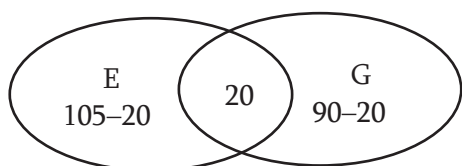
ბ)



გ)



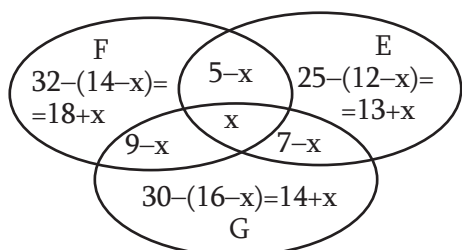
11.



$$N(E \cup G) = 105 + 90 - 20 = 175.$$

არც ერთ ენას არ სწავლობს 25.

12.



$$18+x+13+x+14+x+5-x+9-x+7-x+x=70$$

$$x=4$$

$$\text{ახ: } N(F \cup E \cup G) = N(F) + N(E) + N(G) - N(F \cap E) - N(E \cap G) - N(F \cap G) + N(E \cap F \cap G).$$

$$70 = 32 + 25 + 30 - 5 - 9 - 7 + x$$

$$x = 4.$$

§5. გრაფი

4. ა) არა, შვიდი წვეროა კენტი.

ბ) კი, კენტ წიბოთა რაოდენობა ლუწია.

5. $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$

6. $15 \cdot 5$ კენტია, ე.ი. არა.

7. შესაბამის გრაფში 100 წვეროა და თითოეული მათგანის ხარისხი 4-ია. ე.ი. არის $\frac{4 \cdot 100}{2} = 200$ წიბო (გზა).

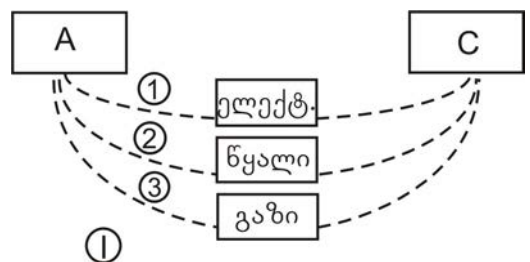
8. გრაფს 30 წვერო აქვს. 9 წვეროს ხარისხი 3-ია. 11-ის 4, 10-ის კი 5. კენტი წვერო არის კენტი, ე.ი. არა.

9. არა, რადგან გრაფს აქვს 19 წვერო და თითოეული კენტია.

10. თუ სახელმწიფოში n ქალაქია, მაშინ გზათა რაოდენობა იქნება $\frac{3n}{2}$. მივიღებთ $\frac{3n}{2} = 100 \Rightarrow n = \frac{200}{3} \notin N$. ე.ი. არა.

11. ცხადია, რადგან ტბებიდან გამოსული მდინარეების საერთო რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს ჩადინებული მდინარეების საერთო რაოდენობისა.

12. სახლები ისე შევაერთოთ კომუნიკაციებით გაზის, წყლისა და ელექტროენერგიის წყაროსთან, როგორც ნახაზზეა. მივიღეთ ორ სახლს შორის სამი წირი, რომლებითაც სიბრტყე გაიყო სამ ნაწილად. მესამე სახლი რომელიმე ამ ნაწილშია. თუ სახლი (1) ნაწილშია, მაშინ წყლის რეზერვუარამდე გაყვანილი მილსადენი, გადაკვეთს ერთ-ერთ წირს, ასევე სხვა შემთხვევაშიც.



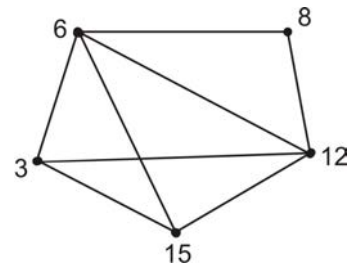
13. „გეომეტრია მათემატიკის დედოფალი“.

§6. კენიგსბერგის ხიდების ამოცანა

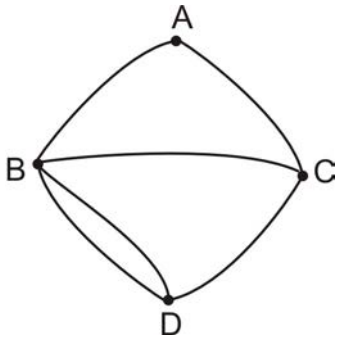
1. შესაბამისი გრაფი იქნება ხე. ე.ი. იქნება 100 გზა.

2. ისე, რომ დარჩეს ხე, სულ არის $\frac{30 \cdot 29}{2}$ გზა. უნდა დარჩეს $30 - 1 = 29$.

ე.ი. გადაიკეტება $\frac{30 \cdot 29}{2} - 29 = 406$.



3. კენტი წვეროებია (3) და (7). ე.ი. ასეთი გზა იქნება 3-დან 7-მდე ან პირიქით



4. შეიძლება დავიწყოთ 3-დან ვამთავრებთ 15-ში ან პირიქით:
 $P(3) = P(15) = 3$.

5. არა, რადგან ორი კენტი წვეროა.

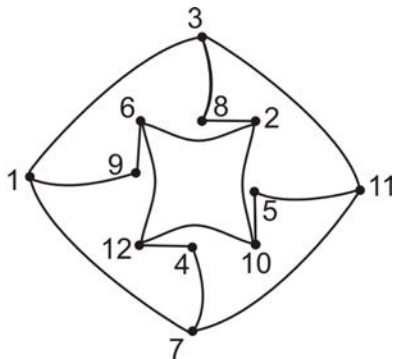
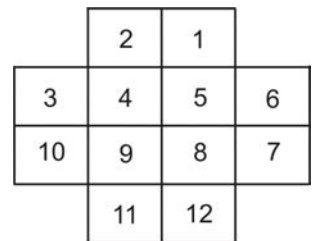
6. ა) $P(C) = P(D) = 3$. ე.ი. უნდა დაიწყოს D-დან და დამთავრდეს C-ში, ან პირიქით.

ბ) დაემატება D და C-ს შემაერთებული ხიდი.

გ) შეერთდება A და B.

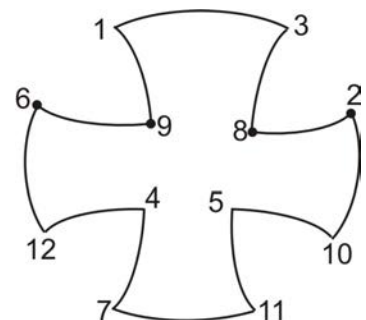
7. შესაძლებელია, რადგან კენტი წვერო ორია: გარე ნაწილი და მარცხენა კუნძული.

8. ა) გრაფის წვეროებად ავირჩიოთ ოთახები, ხოლო წიბოებად კარებები. $P(1) = 3$, $P(5) = 3$. დანარჩენი წვეროები ლუწი წვეროებია. ე.ი. შემოვლა დაიწყება 1-ელი ოთახიდან და დამთავრდება მე-5 ოთახში.



9. ჭადრაკის დაფის უჯრები გადავნიშნოთ. უჯრები მივიჩნიოთ გრაფის წვეროებად, ხოლო წიბოები იყოს ცხენის შესაძლო სვლები. მივიღებთ გრაფს. უნდა ვიპოვოთ ციკლი, რომელიც გაივლის ყველა წვეროში, თან არ არის აუცილებელი შეიცავდეს ყველა წიბოს. რადგან $P(9) = P(8) = P(5) = P(4) = 2$, ამიტომ უნდა დარჩეს 9-1; 9-6; 8-3; 8-2; 5-11, 5-10; 4-7; 4-12 წიბოები. მოვაშოროთ იმდენი წიბო, რომ დანარჩენ წვეროთა ხარისხებიც გახდეს ლუწი. ე.ი.

მოვაშოროთ 3-11; 7-1; 6-2; 12-10 მივიღებთ ციკლს, რომელიც 1-ელ ნახაზზეა.



ნახ. 1

§7 ფუნქცია

5. საზოგადოდ ფუნქცია ლუწია, თუ

$$f(-x)=f(x) \quad \text{და კენტია, თუ } f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

გ) $y=x^4+x^2+5 \quad x \in \mathbb{R} \quad y(x)=x^4+x^2+5 \quad y(-x)=(-x)^4+(-x)^2+5=x^4+x^2+5=y(x) \quad \text{ე.ი. ლუწია}$

დ) $y=x^3+x \quad x \in \mathbb{R} \quad y(x)=x^3+x \quad y(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-x^3-x=-(x^3+x)=-y(x) \quad \text{ე.ი. კენტია}$

ე) $y=3x+1 \quad x \in \mathbb{R} \quad y(x)=3x+1 \quad y(-x)=3(-x)+1=-3x+1 \quad y(-x) \neq y(x)$

ამიტომ ლუწი არ არის

$y(-x)=-3x+1=-(3x-1) \quad y(-x) \neq -y(x) \quad \text{ე.ი. არც კენტია.}$

6. საზოგადოდ ფუნქცია მონოტონურია, ანუ ზრდადია ან კლებადია შუალედში თუ ; $x_2 > x_1$ გამომდინარეობს ან $f(x_2) > f(x_1)$ ან $f(x_2) < f(x_1)$

გ) $y=2x^2$ ანალიზური ხერხი: ვთქვათ $x_2 > x_1 \quad y_2=2x_2^2 \quad y_1=2x_1^2$

განვიხილოთ სხვაობა $y_2 - y_1 = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \quad (x_2 - x_1) > 0$

თუ $x_1 > 0$ და $x_2 > 0 \quad x_1 + x_2 > 0$ და $y_2 > y_1$ ე.ი. $(0; +\infty)$ შუალედში ზრდადია;

თუ $x_2 < 0$ და $x_1 < 0 \quad x_1 + x_2 < 0$ და $y_2 < y_1$ ე.ი. $(-\infty; 0)$ შუალედში კლებადია.

უფრო მარტივია $y=f(x)$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედის დადგენა, თუ აგებულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

7. ზოგადად $y=kx+b$ წრფივი ფუნქცია ზრდადია $(-\infty; +\infty)$ შუალედზე, როცა $k > 0$;

$y=a(x-1)-2x \quad y=(a-2) \cdot x - a \quad \text{ე.ი. ზრდადია } (-\infty; +\infty) \text{ შუალედზე, როცა } a-2 > 0 \text{ ანუ } a \in (2; +\infty).$

8. $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლას წვეროა $(x_0; y_0)$,

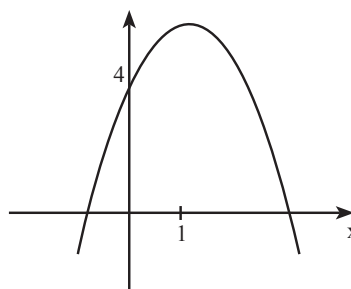
როცა $a > 0$, $(-\infty; x_0]$ კლებადია, $[x_0; +\infty)$ ზრდადია.

როცა $a < 0$ — პირიქით, $y=bx^2-2(b^2-2)x+4 \quad x_0 = \frac{2(b^2-2)}{2b} = \frac{b^2-2}{b} = 1$

უნდა შესრულდეს პირობა

$$\begin{cases} b < 0 \\ \frac{b^2-2}{b} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b < 0 \\ b = -1 \text{ ან } b = 2 \end{cases} \quad b = -1$$

წარმოვადგინოთ გრაფიკულად

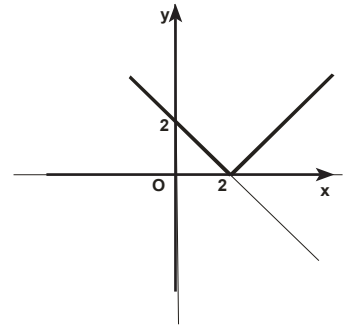


9. ბ) რადგან $f(x)$ კენტია, ამიტომ $f(-157)=-f(157)$. რადგან $T=5$, $f(-157)=-f(2+31 \cdot 5)=-f(2)=-10$

11. ბ) I ხერხი. $y = \sqrt{(x-2)^2} \quad D(y) = (-\infty; +\infty) \quad y = |x-2|$.

ჯერ ავაგოთ $y=x-2$.

აგებულია ის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს Ox ღერძის მიმართ ზედა ნახევარსიბრტყეში დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო ქვემოთ მდებარე ნაწილი გადავიტანოთ Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიულად.

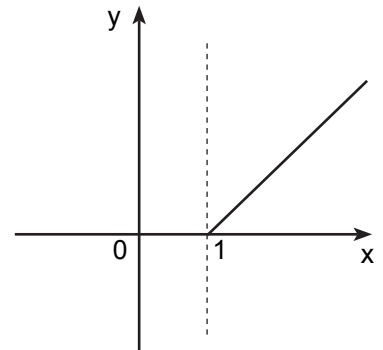


II ხერხი. $y = |x - 2|$ $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

განვიხილოთ ორივე შემთხვევა: $y = \begin{cases} x - 2, & \text{როცა } x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{როცა } x < 2 \end{cases}$

ჟ) $y = (\sqrt{x - 1})^2$ $x - 1 \geq 0$ $D(y) = [1; +\infty)$

ე.ი. გვაქვს $\begin{cases} y = x - 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$.



13. $y = 7x - 5$ გრაფიკის წერტილის კოორდინატების ჯამი უდრის 19. ვთქვათ, გრაფიკის წერტილია

$M(a; b)$ დაიწერება ორი ტოლობა $\begin{cases} a + b = 19 \\ b = 7a - 5 \end{cases}$

14. $y = -3$, $y = x$, $y = 2 - x$ ვიპოვოთ სამკუთხედის წვეროები

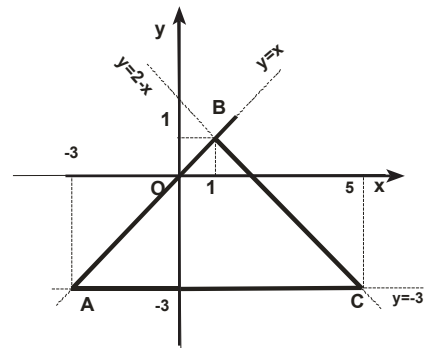
$y = -3$ და $y = x$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი $A(-3; -3)$

$y = -3$ და $y = 2 - x$ გადაკვეთის წერტილია $C(5; -3)$

$y = x$ და $y = 2 - x$ გადაკვეთის წერტილია $B(1; 1)$

$AC = 5 - (-3) = 8$. AC გვერდის სიმაღლე $h = 4$

$S = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.



17. ვთქვათ, მოცემულ პირობას აკმაყოფილებს $y = kx + b$ ფუნქცია, რადგან $y = kx + b$ პარალელურია.

$y = 5x + 3$ წრფის $k = 5$, $y = 5x + b$ გადის $(0; 2)$ წერტილზე,

ამიტომ $2 = 5 \cdot 0 + b$, $b = 2$

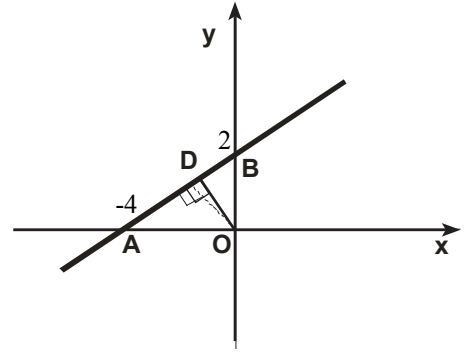
პასუხი: $y = 5x + 2$

18. I ხერხი. ავაგოთ $y=0,5x+2$ ფუნქციის გრაფიკი.

x	0	-4
y	2	0

უნდა ვიპოვოთ AOB მართკუთხა სამკუთხედის
ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე OD

$$AB = 2\sqrt{5} \quad OD = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

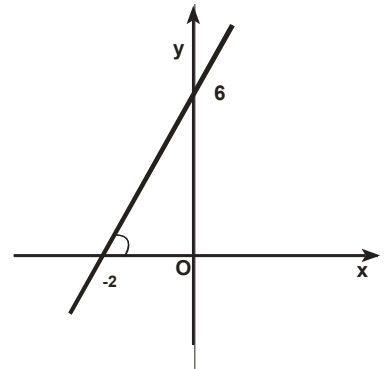


20. I ხერხი. ფუნქცია მოიცემა $y=kx+b$ ფორმულით. ცხადია $b=6$,
ხოლო $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2} = 3$

პასუხი: $3x+6$.

II ხერხი. რადგან $y=kx+b$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის
გრაფიკი გადის $(-2;0)$ და $(0; 6)$ წერტილებზე, ამიტომ
შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობები:

$$\begin{cases} 0 = k(-2) + b \\ 6 = k \cdot 0 + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 6 \\ k = 3 \end{cases}$$



25. ამოვხსნათ გრაფიკულად განტოლება $x^2=2x+8$.

ავაგოთ რაც შეიძლება ზუსტად $y=x^2$ და $y=2x+8$ ფუნქციის გრაფიკები.

განტოლებას აქვს იმდენი ამონახსნი, რამდენ წერტილშიც გადაკვეთავენ გრაფიკები
ერთმანეთს და თითოეული ამონახსნი იქნება გადაკვეთის წერტილის აბსცისა.

26. თუ გავიხსენებთ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნას, შევაძენ. ნახაზზე მოცემული ფუნქციის
გრაფიკი მიიღება $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $\begin{cases} x \rightarrow x-3 \\ y \rightarrow y+1 \end{cases}$ პარალელური გადატანით

რის შედეგადაც $y=-x^2$ პარაბოლის წვერო $O(0;0)$ გადავიდა $O'(-3; 1)$ წერტილში. ე.ი. ნახაზზე
მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ფორმულაა $y=(x+3)^2+1$.

29. ბ) $y=-2 \cdot (x-3)^2+5$

I ხერხი. ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნის წესით $y=-2(x-3)^2+5$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება
 $y=-2x^2$.

$\begin{cases} x \rightarrow x+3 \\ y \rightarrow y+5 \end{cases}$ პარალელური გადატანით, რის შედეგადაც $y=-2x^2$ პარაბოლის წვერო $O(0;0)$
გადადის $(3;5)$ წერტილში. მნიშვნელობათა სიმრავლე $E(y)=(-\infty; 5]$

§8. განტოლება

3. ბ) ვიეტის თეორემით, რადგან $x_1 x_2 > 0$, ამიტომ $x_1 > 0$ და $x_2 > 0$ ან $x_1 < 0$ და $x_2 < 0$,
ხოლო $x_1 + x_2 < 0$, ამიტომ $x_1 < 0$ და $x_2 < 0$.
4. ვთქვათ, $x^2 - 7x - 3 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . $x_1 + x_2 = 7$ $x_1 x_2 = -3$.
შესადგენი კვადრატული განტოლება ვეძიოთ დაყვანილი სახით
 $x^2 + px + q = 0$
ფესვებია $x_1 + 1$ და $x_2 + 1$
 $-p = x_1 + 1 + x_2 + 1 = (x_1 + x_2) + 2 = 7 + 2 = 9$. $p = -9$.
 $q = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = -3 + 7 + 1 = 5$
 $q = 5$
პასუხი: $x^2 - 9x + 5 = 0$,
8. $(a+2)(a-4) \cdot x = (a-4)(a+4)$
1) თუ $(a+2)(a-4) \neq 0$ ანუ $a \neq -2$ და $a \neq 4$, განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი
$$x = \frac{(a-4)(a+4)}{(a+2)(a-4)} = \frac{a+4}{a+2}.$$

2) თუ $a = 4$, განტოლებას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.
3) თუ $a = -2$, ამონახსნი არ აქვს.
10. $2x - 3 = 7$ $x = 5$.
რადგან $x = 5$, არის $bx^2 + 5x - 2b = 0$ განტოლების ფესვი, ჩავსვათ, მივიღებთ: $b = -1 \frac{2}{23}$.
12. ბ) $x^2 - 4bx - a^2 + 4b^2 = 0$
 $D_1 = (2b)^2 + (a^2 - 4b^2) = a^2$.
 $x_1 = 2b - a$, $x_2 = 2b + a$.
20. დ) მოც.: $x^2 - 6x + 7 = 0$
 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{6^2 - 4 \cdot 7} = 2\sqrt{2}$.
27. ე) $|x_1 - x_2| = \sqrt{2x - 5} = 5 - 2x$. ზოგადად $\sqrt{a} = -a$, მაშინ $a = 0$,
ე.ი. $\sqrt{2x - 5} = 5 - 2x$, $2x - 5 = 0$, $x = 2,5$.
ზ) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.
 $\sqrt{x} = 1$ ან $\sqrt{x} = 2$. ე.ი. $x = 1$ ან $x = 4$.
28. ბ) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$
 $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 15$
 $x^2 - 5x + 5 = y$
 $(y-1)(y+1) = 15$
 $y = \pm 4$.
30. $(x + \sqrt{x^2 - 1})^3 (x - \sqrt{x^2 - 1})^5 = 1$
 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^3 (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$

$$(x - \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ ან } x = 1$$

$$32. \quad \sqrt{(x-1)(x+5)} \sqrt{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$\text{დ.მ.ს.} \quad \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq 0 \\ (x+2)(x-3) \geq 0 \end{cases}, \text{ მივიღებთ: } x_1 = -5; \quad x_2 = 3.$$

$$33. \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 4.$$

კვადრატული სამწევრი უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $a = 1$.

35. გაუტოლოთ ერთმანეთს:

$$(a+6)x^2 - 2 = 2ax + 1$$

$$(a+6)x^2 - 2ax - 3 = 0$$

$$D = 0 \quad (2a)^2 - 12(a+6) = 0$$

$$a = -3 \quad a = 6.$$

$$38. \text{ გ) } ax^4 + (2a-1)x^2 + 1 = 0.$$

$$x^2 = y. \text{ მაშინ } ay^2 + (2a-1)y + 1 = 0$$

იმისათვის, რომ მოცემულ განტოლებას ჰქონდეს ორი ამონახსნი, საჭიროა

$ay^2 + (2a-1)y + 1 = 0$ განტოლებას y -ის მიმართ ჰქონდეს:

$$1) \text{ ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი ამონახსნი, ე.ი. } y_1 y_2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

$$2) \text{ ერთი დადებითი ამონახსნი } y_1 = y_2 > 0 \quad D = 0 \quad (2a-1)^2 - 4a = 0$$

$$a \neq \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad a \neq \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

§9. განტოლებათა სისტემა

$$2. \text{ ე) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ -\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$3. \text{ გ) } \begin{cases} (2x+y)(x-y) = 0 \\ 2x-y = 1 \end{cases} \quad \text{სისტემის პირველი განტოლება გაიშლება ორ განტოლებად}$$

$$2x+y=0 \quad \text{ან} \quad x-y=0$$

$$\text{პას.: } (0, 25; -0,5) \quad (1; 1).$$

$$4. \text{ დ) } \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}. \quad \text{სისტემის ორივე განტოლების მარცხენა მხარეები წარმოადგენენ ერთგვაროვან მეორე ხარისხის მრავალწევრს.}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad \left| \times (-2) \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4xy + 2y^2 = -4 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 5xy + 3y^2 = 0 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}.$$

$-2x^2+5xy+3y^2=0$ ამოვხსნათ x -ის მიმართ. მივიღებთ: $x_1 = -\frac{y}{2}$ $x_2=3y$.

მივიღეთ ორი სისტემა:

$$1) \begin{cases} x = -\frac{y}{2} \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ან} \quad 2) \begin{cases} x = 3y \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

პას.: $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); (-3; -1); (3; 1).$

10. შევცვალოთ y x -ით $\begin{cases} 3x + 2y = 5a \\ \frac{1}{a}x + x = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ x(1 + a) = 9a \end{cases}$

თუ $a=-1$, სისტემას ამონახსნო არ აქვს.

თუ $a \neq -1$, $\begin{cases} x = a \\ x = \frac{9a}{1+a} \end{cases} \quad a = \frac{9a}{1+a} \quad a = 8.$

11. $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 6a + 2 \\ 3x + 2y = 3a^2 + 4a + 3 \end{cases}$ შევკრიბოთ:

$$5(x+y)=5a^2-2a+5$$

$$x+y=0,2(5a^2-2a+5)$$

გამოსახულება უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $a = -\frac{-2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5}$ და ეს მნიშვნელობა 4,8-ის ტოლია.

§10. ამოცანების ამოხსნა

12. I ხერხი. თავდაპირველად II-ში იყო x რვეული

I-ში იქნებოდა $(x+24)$ რვეული

ვთქვათ, იმისათვის, რომ ორივე შემთხვევაში რვეულების რაოდენობა გათანაბრდეს, საჭიროა I-დან II-ში გადავდოთ y რვეული, I-ში გახდება $2+24-y$, II-ში $x+y$

ვწერთ განტოლებას $x+24-y=x+y$

$$x=12$$

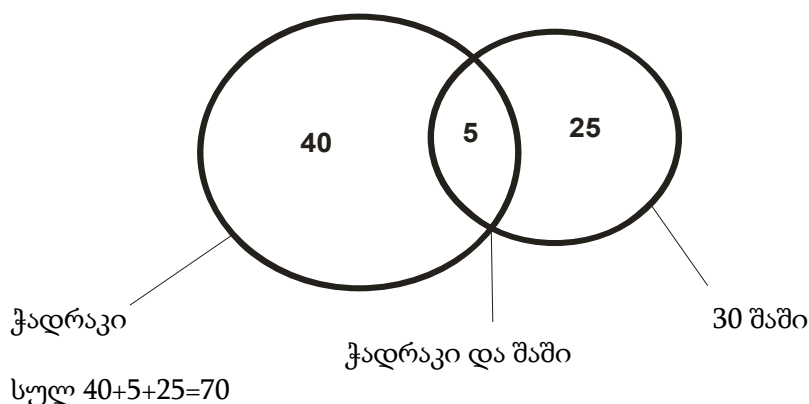
II ხერხი. თავდაპირველად I შეკვრაში 24-ით მეტი რვეულია ვიდრე II-ში. იმისათვის, რომ ორივე შეკვრაში რვეულების რაოდენობა გათანაბრდეს I და II-ში უნდა გადავდოთ $24/2=12$.

15. რადგან 15 დღის შემდეგ დარჩენილი ჰქონდა 9 000 აგური, ხოლო 18 დღის შემდეგ 7 500 აგური. ამიტომ 3 დღეში იხარჯება $(9\ 000-7\ 500)=1\ 500$ აგური.

1 დღეში კი- 500 აგური.

მშენებელს კიდევ ეს დარჩენილი 7 500 აგური ეყოფა $7\ 500 : 500 = 15$ დღეს.

20. ვისარგებლოთ დიაგრამით



22. როცა მანძილი მუდმივია, სიჩქარე და დრო პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია.

v	60	x
t	4	3

$$\frac{60}{4} = \frac{x}{3}; \quad x = 45 \text{ კმ/სთ}$$

35. თუ ჭიქის ნახევარი ივსება 20წმ-ში, 1წმ-ით ადრე გაივსებოდა ნახევრის ნახევარი, ანუ მეოთხედი.

პასუხი: გაივსება 19წმ-ში

40. თუ 6 ადამიანის საშუალო ასაკი 22 წელია, ექვსივეს ასაკთა ჯამი უდრის $6 \cdot 22 = 132$

ერთი ადამიანის წასვლის შემდეგ, 5 ადამიანის საშუალო ასაკია 21 წელი. ხუთივეს ასაკთა ჯამი კი უდრის $5 \cdot 21 = 105$

ე.ი. ნიკას ასაკი $132 - 105 = 27$

44. მოცემულია, რომ სულ 30 ცალი მაგიდაა. რადგან ერთუჯრიანი მაგიდების რაოდენობა უდრის ერთად აღებული 4-უჯრიანი და 3-უჯრიანი მაგიდების რაოდენობას, ამიტომ 1-უჯრიანი მაგიდების რაოდენობა იქნება $\frac{30}{2} = 15$

4-უჯრიანი და 3-უჯრიანი ერთად 15.

ავღნიშნოთ 4-უჯრიანი მაგიდების რაოდენობა x -ით,

3-უჯრიანების რაოდენობა იქნება $(15 - x)$;

1-უჯრიანების რაოდენობა არის 15

ვწერთ განტოლებას:

$$4x + 3 \cdot (15 - x) + 15 = 65$$

45. რადგან არდამსწრეთა რაოდენობა არის დამსწრეთა რაოდენობის 20%, დამსწრეთა რაოდენობა 5-ჯერ მეტია არადამსწრეთა რაოდენობაზე.

ვთქვათ, არადამსწრეთა რაოდენობა იყო x , დამსწრეთა რაოდენობა იქნებოდა $5x$,

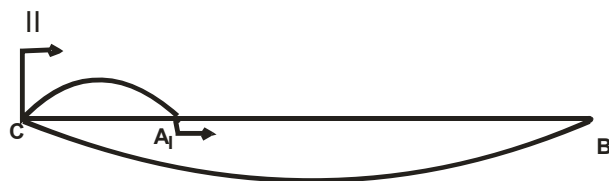
სულ ამხანაგობის წევრთა რაოდენობა - $6x$

6 ადამიანის გასვლის შემდეგ არდამსწრეთა რაოდენობა გახდა $x+6$; დამსწრეთა რაოდენობა - $5x-6$;

ამ შემთხვევაში, არდამსწრეთა რაოდენობა არის დამსწრეთა რაოდენობის 25%, ანუ 4-ჯერ ნაკლები.

ვწერთ განტოლებას: $5x - 6 = 4 \cdot (x + 6)$

49. წარმოვიდგინოთ ამოცანის შესაბამისი ნახაზი. რადგან, II უფრო სწრაფად მოძრაობს I-ზე, II უკან იქნება I-ზე.



პირობის თანახმად,

$$BC = AB + 12, \quad BC - AB = AC = 12$$

ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ სამი ხერხით:

I ხერხი: ვთქვათ, II 1კმ გადის x წთ-ში, მაშინ I 1კმ-ს გაივლის $x + \frac{3}{4} = \frac{4x+3}{4}$ წთ-ში.

II- 1წთ-ში გაივლის $\frac{1}{x}$ კმ-ს, 1სთ-ში $\frac{60}{x}$ კმ-ს, ე.ი. II-ის სიჩქარეა $\frac{60}{x}$ კმ-სთ.

I- 1წთ-ში გაივლის $\frac{4}{4x+3}$ კმ-ს, 1სთ-ში $\frac{240}{4x+3}$ კმ-ს, ე.ი. I-ის სიჩქარეა $\frac{240}{4x+3}$ კმ-სთ.

I - 3სთ-ში გაივლის $3 \cdot \frac{240}{4x+3} = \frac{720}{4x+3}$ კმ-ს

II - 3სთ-ში გაივლის $3 \cdot \frac{60}{x} = \frac{180}{x}$ კმ-ს

ამოცანის პირობის თანახმად, ვწერთ განტოლებას

$$\frac{180}{x} - \frac{720}{4x+3} = 12$$

II ხერხი: ვთქვათ, I-ის სიჩქარეა x კმ-სთ, ე.ი. x კმ-ს გადის 1სთ-ში, ანუ 60 წთ-ში 1კმ-ს გაივლის

$\frac{60}{x}$ წთ, მაშინ II 1კმ-ს გაივლის $\frac{60}{x} - \frac{3}{4} = \frac{240-3x}{4}$ წთ; 1წთ-ში გაივლის $\frac{4}{240-3x}$ კმ, 1სთ – ში კი

$$\frac{240}{240-x} = \frac{80}{80-x} \text{ კმ.}$$

ე.ი. II-ის სიჩქარეა $\frac{80}{80-x}$ კმ.

ორივე შიკრიკის სიჩქარე გამოვსახეთ ერთი უცნობით და შემდეგ გავაგრძელებთ როგორც I ხერხით ამოხსნის დროს.

III ხერხი: აღვნიშნოთ $AB=x$ კმ, მაშინ $AC=x+12$ კმ

I - x კმ, გაიარა 3სთ-ში, ე.ი. სიჩქარე იქნება $\frac{x}{3}$ კმ/სთ, 1სთ-ში $\frac{x}{3}$ კმ. 1კმ-ს კი $\frac{3}{x}$ სთ= $\frac{180}{x}$ წთ

II $(x+12)$ კმ გაიარა 3სთ-ში, ანალოგიურად, სიჩქარე იქნება $\frac{x+12}{3}$ კმ/სთ და 1კმ გაივლის $\frac{3}{x+12}$ სთ=

$$\frac{180}{x+12} \text{ წთ}$$

რადგან, II 1კმ-ს გადის $\frac{3}{4}$ წთ-ით ჩქარა I-ზე, ვწერთ განტოლებას $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+12} = \frac{3}{4}$

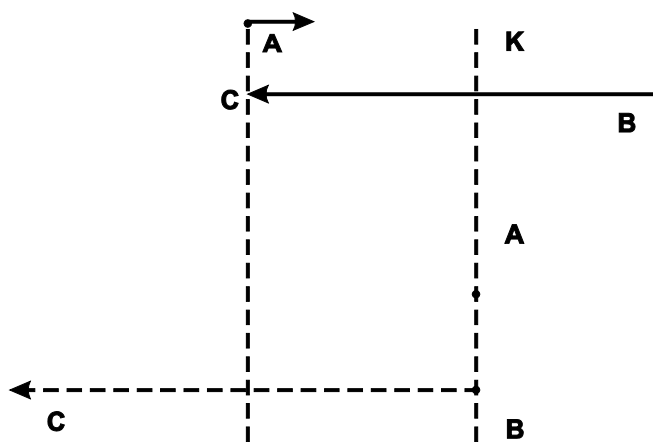
54. ვთქვათ, დარბაზში დადგმული იყო x მერხი. შევადგინოთ ასეთი ცხრილი

	მერხების რაოდენობა	1მერხზე მოსწ რაოდ.	სულ მოსწ. რაოდ.
I	$x+3$	7	$7 \cdot (x+3)$
II	$x-2$	8	$8 \cdot (x-2)$

რადგან ორივე შემთხვევაში მოსწავლეთა რაოდენობა ერთი და იგივეა,

$$7 \cdot (x+3) = 8 \cdot (x-2)$$

57. შევნიშნოთ, რომ ამოცანაში მოძრავი წერტილი (ჩვენს შემთხვევაში მგზავრი) ჩაუვლის შემხვედრი მიმართულებით მოძრავ გარკვეული სიგრძის მატარებელს. ავლწეროთ ნახაზზე.



ჩაუვლის პროცესის დასაწყისი
A მგზავრი, BC მატარებელი

ჩაუვლის პროცესის დასასრული

მგზავრის მიერ გავლილი მანძილია CK, ხოლო შემხვედრი მატარებლის მიერ გავლილი იგივეა, რაც მატარებლის B ბოლოს მიერ გავლილი მანძილი BK.

რადგან მატარებელი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ანუ მისი ყველა წერტილი ერთნაირ მანძილებს გადის.

ორივეს მიერ განვლილი მანძილი $CK+BK=BC=$ მატარებლის სიგრძეს.

მგზავრის სიჩქარე 40კმ/სთ

$$\text{დრო } 3 \text{ წმ} = \frac{3}{3600} \text{ სთ} = \frac{1}{1200} \text{ სთ}$$

$$\text{მატარებლის სიგრძე } 75\text{მ} = \frac{75}{1000} \text{ კმ} = \frac{3}{40} \text{ კმ}$$

ვთქვათ, შემხვედრი მატარებლის სიჩქარეა x კმ/სთ, ვწერთ განტოლებას:

$$\frac{1}{1200} \cdot x + \frac{1}{1200} \cdot 40 = \frac{3}{40}; \quad x = 50 \text{ კმ/სთ}$$

59. როცა ორთქმავლის ბორბალი აკეთებს 1 ბრუნს, ამ დროში ორთქმავლის მიერ განვლილი მანძილი უდრის ბორბლის წრეწირის სიგრძეს, ამიტომ ერთ და იგივე მანძილზე გადაადგილებისას ბორბლის წრეწირის სიგრძე და ბრუნთა რაოდენობა უკუპროპორციული სიდიდეებია. ვთქვათ, ბორბლის წრეწირის სიგრძეა x დმ, მაშინ წამყვანი ბორბლის სიგრძე იქნება $(x+32)$ დმ. შევადგინოთ ასეთი ცხრილი:

	ბორბლის წრეწ.სიგრძე	ბრუნთა რიცხვი	ორთქმავლის მიერ გავლილი მანძ
წამყვანი	$x+32$	240	$240 \cdot (x+32)$
ვაგონის	x	560	$560x$

$$\text{ვწერთ განტოლებას: } 240 \cdot (x+32) = 560x$$

62. I ხერხი:

რადგან ერთსა და იმავე დროში I ბეჭდავს 6 გვერდს, ხოლო II- 5 გვერდს. ამიტომ მათი სამუშაოს შესრულების სიჩქარეების (1სთ-ში შესრულებული სამუშაო) შეფარდება $I : II = 6 : 5$

ე.ი. I 1სთ-ში ბეჭდავს $6x$ გვ. II- $5x$ გვ.

I 72 გვერდს დაბეჭდავს $\frac{72}{6x}$ სთ; II - $\frac{72}{5x}$ სთ;

ამოცანის პირობის მიხედვით, ვწერთ განტოლებას: $\frac{72}{5x} - \frac{72}{6x} = 1,5$

63. როცა სხეულები მოძრაობენ წრეწირზე ერთმანეთის შესახვედრად, I შეხვედრამდე ორივე სხეულის ერთად გავლილი მანძილი უდრის წრეწირის სიგრძეს.

ხოლო როცა სხეულები მოძრაობენ ერთი და იმავე მიმართულებით, I შეხვედრამდე დიდი სიჩქარის მქონე სხეული შემოწერს 1 ბრუნით მეტს, ანუ გაივლის წრეწირის სიგრძით მეტ მანძილს.

ვთქვათ, სწრაფად მოძრავი სხეულის სიჩქარეა x მ/წმ, ხოლო ნაკლები სიჩქარით მოძრავი სხეულის y მ/წმ. ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, ვწერთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 20x - 20y = 100 \\ 4x + 4y = 100 \end{cases}$$

65. I ხერხი: ვთქვათ, I მილი ავზს აავსებს x სთ-ში, მაშინ 1სთ-ში აავსებს $\frac{1}{x}$ ნაწილს.

ხოლო II ავზს აავსებს y სთ-ში, 1სთ-ში აავსებს $\frac{1}{y}$ ნაწილს.

ამოცანის პირობის მიხედვით, შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 6 * \frac{1}{x} + 6 * \frac{1}{y} = 1 \\ 3 * \frac{1}{x} + 2 * \frac{1}{y} = \frac{40}{100} \end{cases}$$

69. ამ ამოცანაში მოხერხებულია ვისარგებლოთ რთული პროცენტის ფორმულით.

ზოგადად, თუ საწყისი თანხაა x ლ, ყოველწლიური ზრდის (კლების) % არის $P\%$, მაშინ n წლის შემდეგ დაფიქსირებული თანხა შესაბამისად იქნება $b = a(1 + \frac{P}{100})^n$ ან $b = a(1 - \frac{P}{100})^n$.

ჩვენს ამოცანაში ქსოვილის საწყისი ფასი $a=100$ ლ. ყოველწლიური კლების პროცენტი $P\%$ $n=2$ წლის შემდეგ დაფიქსირებული თანხა $b=81$ ლ.

შედგება განტოლება:

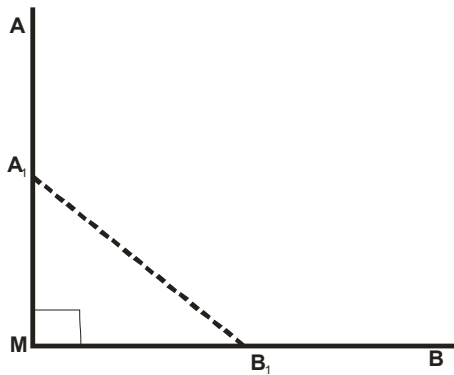
$$81 = 100 * (1 - \frac{P}{100})^2;$$

$$9 = 10 * (1 - \frac{P}{100})$$

73. ვთქვათ, I-ად გადმოასხეს x ლ სპირტი. წყლით შევსების შემდეგ, ჭურჭელში სულ არის 45ლ, სპირტი კი $(45 - x)$ ლ, ე.ი. 1ლ ნარევი შეიცავს $\frac{45-x}{45}$ ლ სპირტს.

მეორედ გადმოასხეს x ლ ნარევი. გადოსხმულ ნარევეში სპირტის რაოდენობა იქნება $\frac{x(45-x)}{45}$ ლ საბოლოოდ დარჩენილი სპირტის რაოდენობა არის $(45-x) - \frac{x(45-x)}{45} = 5$

75.



საწყის მდგომარეობაში სხეულები იმყოფებიან A და B წერტილებში, საბოლოოდ A_1 და B_1 -ში.

საწყისი $MA=270$ მ; $MB=125$ მ

საბოლოო MA_1 და MB_1 $A_1B_1=130$

ვთქვათ, B სხეულის სიჩქარეა x მ/წმ, მაშინ A სხეულის სიჩქარე იქნება $2x$ მ/წმ

A სხეულის მიერ განვლილი მანძილი $AA_1=10 * 2x = 20x$ მ $MA_1=(270-20x)$ მ

B სხეულის მიერ გავლილი მანძილი $BB_1=10x$ მ $MB_1=125-10x$

მართკუთხა ΔA_1B_1M -დან პითაგორას თეორემით მივიღებთ განტოლებას:

$$(270-20x)^2 + (125-10x)^2 = 130^2$$

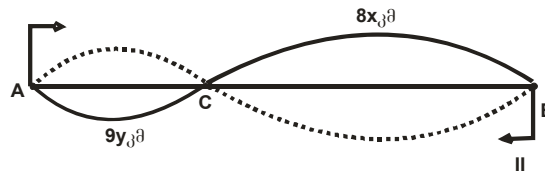
76. ვთქვათ, გამოსაშვებ კლასში x მოსწავლეა. თითოეული მოსწავლე გაცვლისთვის 1-ჯერ

უკავშირდება $(x-1)$ მოსწავლეს. ამიტომ ყველა დაკავშირებათა რაოდენობა არის $\frac{x(x-1)}{2}$;

თითოეულ გაცვლაში ფიქსირდება 2 ფოტოსურათი, ამიტომ ფოტოსურათების რაოდენობა

$$2 * \frac{x(x-1)}{2} = 1560$$

78. შევადგინოთ ნახაზი:



მოკლედ აღწეროთ სხეულის მოძრაობა შეხვედრამდე და შეხვედრის შემდეგ.

შეხვედრამდე

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I-მა გაიარა AC კმ} \\ \text{II-მ BC კმ} \\ \text{BC=AC+12} \\ \text{I-ის დრო} < \text{ნსთ-ით II-ის დროზე} \end{array} \right.$$

შეხვედრის შემდეგ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I-მა გაიარა BC კმ 8 სთ-ში} \\ \text{II-მ AC კმ 9სთ-ში} \end{array} \right.$$

განვიხილოთ ამოცანის ამოხსნის 2 გზა:

- I) ორი უცნობის შემოტანით; II) ერთი უცნობის შემოტანით
 II) ვთქვათ, I ტურისტის სიჩქარეა x კმ/სთ, II-ის კი y კმ/სთ;

ვისარგებლოთ ამოცანის მოკლე ჩანაწერით შეხვედრის შემდეგ. I-ის გავლილი მანძილი $BC=8$ კმ; II-ის $AC=9y$ კმ; რადგან $BC=AC+12$

ვწერთ სისტემის I განტოლებას $8x=9y+12$, ახლა ვისარგებლოთ მოკლე ჩანაწერით

შეხვედრამდე. I -ის დრო AC-ზე არის $\frac{9y}{x}$, II-ის BC-ზე $\frac{8x}{y}$.

პირობის მიხედვით ვწერთ სისტემის II განტოლებას $\frac{9y}{x} = \frac{8x}{y} - 6$;

ჩავწეროთ სისტემა

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x = 9y + 12 \\ \frac{9y}{x} = \frac{8x}{y} - 6 \end{array} \right.$$

II ხერხი: ვთქვათ, შეხვედრის შემდეგ I -ის გავლილი მანძილი $BC=x$, რადგან ეს მანძილი გაიარა 8 სთ-ში, I -ის სიჩქარე იქნება $\frac{x}{8}$;

II-მ შეხვედრის შემდეგ გაიარა $AC=(x-12)$ კმ 9სთ-ში, II-ს სიჩქარე $\frac{x-12}{y}$ კმ/სთ.

შევშეშოთ ორივე სიჩქარის გამოსახვა ერთი უცნობით, რის შემდეგაც, ამოცანის პირობის გათვალისწინებით, ადვილად შევადგენთ ორუცნობიან განტოლებას.

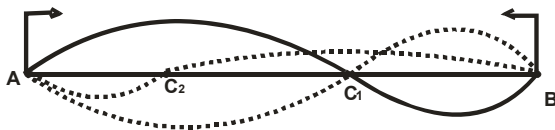
79. თუ გადასაზიდი ტვირთის სიდიდე უცვლელია, მაშინ მანქანების რაოდენობა და გადაზიდვისთვის საჭირო დრო უკუპროპორციული სიდიდეებია. ანუ ამ ორი სიდიდის ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა. შევადგინოთ ასეთი ჩანაწერი:

	მანქანების რაოდენობა	დრო
რაც იყო განსაზღვრული	x	y
I შემთხვევა	x-2	y+2
II შემთხვევა	x+4	y-2

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ვწერთ სისტემას:

$$\begin{cases} xy=(x-2)(y+2) \\ xy=(x+4)(y-2) \end{cases}$$

89. წარმოვადგინოთ ნახაზზე ამოცანაში მოცემული პირობა:



C_1 – არის I შეხვედრის წერტილი

C_2 – II შეხვედრის წერტილი;

$$BC_1=20, \quad AC_2=10$$

აღვნიშნოთ $AB=x$ და $\frac{\text{I-ის სიჩქარე}}{\text{II-ის სიჩქარე}}=k$, მაშინ I შეხვედრამდე I-მა გაიარა $(x-20)$ კმ, II-მ - 20კმ

II შეხვედრამდე I-მა გაიარა $(2x-10)$ კმ, II-მ $(x+10)$ კმ

რადგან შეხვედრამდე ერთნაირ დროს ხარჯავენ, ამიტომ მანძილების შეფარდება უდროს

$$\text{სიჩქარეების შეფარდებას } \left(\frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2} \right) \Rightarrow \frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2} = k$$

$$\text{ჩვენს შემთხვევაში: } \frac{20}{x-20} = \frac{x+10}{2x-10} = k$$

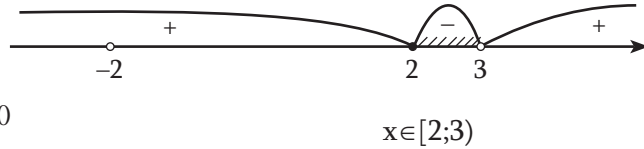
$$\text{I ნაჭერში ვერცხლის პროცენტული შემცველობა არის } \frac{5}{x} \cdot 100\% = \frac{5}{20} \cdot 100\% = 25\%$$

§11. უტოლობები

5. $y = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2-x-6}}$ ფუნქციას აზრი აქვს, როცა $\frac{4-x^2}{x^2-x-6} \geq 0$,

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} \leq 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x-3} \leq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$



6. ა) $\frac{8}{\sqrt{3x-1}} + x\sqrt{7-x}$ გამოსახულებას აზრი არ აქვს მაშინ, როცა $3x-1 \leq 0$ ან $7-x < 0$.

$$x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (7; +\infty).$$

7. ა) $x \cdot (2 - \sqrt{5}) < (5 - \sqrt{13})(2 - \sqrt{5})$

რადგან $2 - \sqrt{5} < 0$, ამიტომ $x > 5 - \sqrt{13}$

უმცირესი მთელი ამონახსნია $x=2$.

10. $x^2=a+7$ და $x^2=3-2a$

ა) ორივეს აქვს ფესვები, როცა $\begin{cases} a+7 \geq 0 \\ 3-2a \geq 0 \end{cases}$.

ბ) პირველს აქვს ფესვი და მეორეს არა, როცა $\begin{cases} a+7 \geq 0 \\ 3-2a < 0 \end{cases}$.

გ) არცერთს არა აქვს ფესვი, როცა $\begin{cases} a+7 < 0 \\ 3-2a < 0 \end{cases}$.

12.
$$\begin{cases} x - \frac{8}{5}y = \frac{1}{5} \\ ax + \frac{2}{5}y = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (x > 0 \text{ და } y > 0)$$

$$\begin{cases} 5x - 8y = 1 \\ 20ax + 8y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4a+1) = 1 \\ 5x - 8y = 1 \end{cases}$$

თუ $4a+1=0$, სისტემას ამონახსნი არ აქვს;

თუ $a \neq -0,25$, მივიღებთ $\begin{cases} x = \frac{1}{4a+1} \\ y = \frac{1-a}{2(4a+1)} \end{cases}$ და რადგან $x > 0$ და $y > 0$, ამოვხსნათ უტოლობათა

სისტემა: $\begin{cases} \frac{1}{4a+1} > 0 \\ \frac{1-a}{2(4a+1)} > 0 \end{cases}, \quad a \in (-0,25; 1).$

13. გ) $(a+5) \cdot x \geq 0$

1) თუ $a+5 > 0$, მაშინ $x \geq 0$,

2) თუ $a+5 < 0$, მაშინ $x \leq 0$,

2) თუ $a+5=0$, მაშინ $x \in \mathbb{R}$.

$$16. \begin{cases} x \leq 13 \\ x > a \end{cases}$$

სისტემას რომ ჰქონდეს ამონახსნი, უნდა შესრულდეს პირობა $a \geq 13$.

თუ $a=13$, მაშინ $x=13$;

თუ $a>13$, მაშინ $x \in (a; 13]$;

18 მთელი რიცხვი გვექნება, როცა $a=-4$.

$$17. a) (5x-1)^2 \leq 7$$

$$|5x-1| \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{5} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{7}}{5}.$$

$$18. \left(ax^2 - \frac{1}{a} > 0 \text{ თუ } a > 0\right) \Leftrightarrow (a^2 x^2 - 1 > 0) \Leftrightarrow (|ax| > 1) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}\right).$$

$$19. \begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \\ x > b \end{cases}$$

ბ-ს მიხედვით განვიხილოთ შემთხვევები

$$1) b > 4 \quad x \in (b; +\infty)$$

$$2) b = 4 \quad x \in (4; +\infty)$$

$$3) b < 1 \quad x \in (b; 1) \cup (4; +\infty).$$

$$20. \frac{(x-3)(x-5)(8-x)^2}{(x-2)(5x-7)^2} < 0$$



$$x \in (-\infty; 1,4) \cup (1,4; 2) \cup (3; 5).$$

$$22. \frac{x^2 + 3x + a}{x^2 + x + 1} < 2$$

$$\text{რადგან } x^2 + x + 1 > 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + a}{x^2 + x + 1} < 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + a < 2x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + (2-a) > 0.$$

ეს უტოლობა რომ შესრულდეს, x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა ერთისა

$$D=0, \text{ ე.ი. } 1-4(2-a)=0$$

$$a=1,75.$$

$$23. x^2 - 2(a-1)x + (a+5) = 0$$

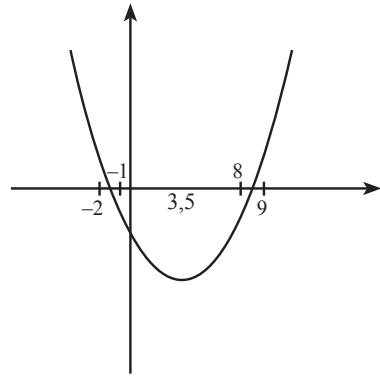
$$a) \text{ ფესვები დადებითა, თუ } \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1)^2 - 4(a+5) \geq 0 \\ 2(a-1) > 0 \\ a+5 > 0 \end{cases}.$$

გ) $x_1 > 0$ და $x_2 < 0$. აქ საკმარისია მხოლოდ ერთი პირობის დაწერა: $x_1 x_2 < 0$ ($D > 0$ ავტომატურად სრულდება).

24. ა) $\sqrt{x-1} > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x-1 > 9 \Leftrightarrow x > 10;$
 ბ) $\sqrt{5-3x} > -5 \Leftrightarrow 5-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (1\frac{2}{3}; +\infty);$
 გ) $\sqrt{3-x} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 3];$
 დ) $\sqrt{2x+5} < 0 \quad x \in \emptyset;$
 ე) $\sqrt{3x-12} \leq 0 \quad x=4.$

40. ა) $x^2 - 7x + a < 0$
 $x_0 = 3,5$
 ეს ამონახსნებია: $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8.$

$$\begin{cases} f(-2) \geq 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 14 + a \geq 0 \\ 1 + 7 + a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -18 \\ a < -8 \end{cases} \quad a \in [-18; -8)$$



ბ) $x \in \emptyset$, რადგან ამონახსნთა შუალედის სიმეტრიის ცენტრია $x=1 \in \mathbb{Z}$.

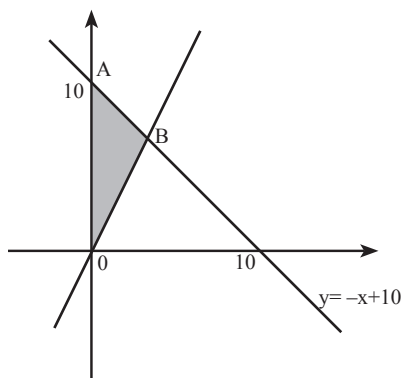
41. $V_3 = x \quad V_{\text{მდ}} = y$
 კატერის მოძრაობის დროა: $\frac{S}{x+y} + \frac{S}{x-y} = \frac{2x}{x^2 - y^2} S$
 განვ. $\frac{2xS}{x^2 - y^2} - \frac{2S}{x} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2y^2}{x(x^2 - y^2)} S = \frac{2y^2}{x(x^2 - y^2)} > 0$
 ე.ი. მოტოციკლისტმა უფრო სწრაფად გაიარა.

43. $t = \frac{S}{24} + \frac{S}{16} = \frac{5S}{48}; \quad 2 \leq \frac{5S}{48} \leq 3,$

$$\frac{96}{5} \leq S \leq \frac{144}{5} \quad \text{მინიმუმ } 19,2 \text{ კმ და მაქსიმუმ } 28,8 \text{ კმ.}$$

§12. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$1. \begin{cases} y < -x + 10 \\ y \geq 2x \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$



უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას

$4x - 3y + 2$ გამოსახულება მიიღებს

$O(0;0)$; $A(0;10)$ ან $B(\frac{10}{3}; \frac{20}{3})$ წერტილზე.

$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow (\frac{10}{3}; \frac{20}{3}).$$

თუ $x=y=0$, მაშინ $4x - 3y + 2 = 2$;

თუ $x=0$, $y=10$ მაშინ $4x - 3y + 2 = -28$;

თუ $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{20}{3}$, მაშინ $4x - 3y + 2 = -\frac{14}{3}$.

უმცირეს მნიშვნელობას აღწევს, თუ $x=0$ და $y=10$, და ეს მნიშვნელობაა -28 ,

უდიდესს კი, თუ $x=0$ და $y=0$, და ეს მნიშვნელობაა 2 .

3. ვთქვათ A-დან N1 მოედანზე გააგზავნეს x ტ, N2-ზე კი y ტ. მივიღებთ ასეთ ცხრილს:

	A	B
N1	x	$200 - x$
N2	y	$280 - y$
N3	$320 - (x+y)$	$380 - (200 - x + 280 - y) = x + y - 100$

გადაზიდვის მთლიანი ღირებულება M-ით აღვნიშნოთ:

$$M = 2x + 4y + 6(320 - x - y) + 4(200 - x) + 5(280 - y) + 3(x + y - 100).$$

$$M = -5x - 4y + 3820.$$

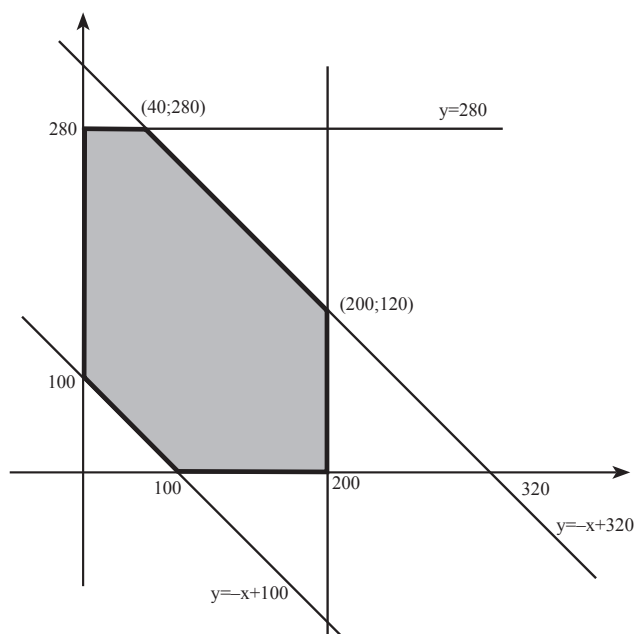
ამასთან უნდა შესრულდეს:

$$\begin{cases} 200 - x \geq 0 \\ 280 - y \geq 0 \\ 320 - x - y \geq 0 \\ x + y - 100 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 200 \\ y \leq 280 \\ y \leq -x + 320 \\ y \geq x + 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

M უმცირესს მნიშვნელობას რომელიმე წვეროზე მიიღებს, ასეთია $(200; 120)$.

აქედან დანახარჯები იქნება

$$3820 - (1000 + 480) = 2340.$$



§13. მიმდევრობები

15 (დ) $a_n = 12 - 0,2n$

$12 - 0,2n > 7$

$0,2n < 5$

$n < 25$

ე.ი. მოცემულ პირობას აკმაყოფილებს მიმდევრობის პირველი 24 წევრი

$a_1; a_2; \dots; a_{24}$ უნდა ვიპოვოთ S_{24}

$$S_{24} = \frac{a_1 + a_{24}}{2} \cdot 24 \quad a_1 = 12 - 0,2 \cdot 1 \quad a_{24} = 12 - 0,2 \cdot 24$$

16(8) 12; 18; 156

საზოგადოდ, არითმეტიკული პროგრესია თუ $d > 0$ ზრდადია, თუ $d < 0$ კლებადია.

12 18 156

ვთქვათ, $a_k = 12$ $a_{k+t} = 18$ $a_{k+m} = 156$

$k; t; m \in \mathbb{N}, m > t > 0$

ცნობილია ფორმულა $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$, ამიტომ $d = \frac{a_{k+t} - a_k}{k+t-k} = \frac{a_{k+m} - a_k}{k+m-k}$, $d = \frac{6}{t} = \frac{144}{m}$
 $\frac{m}{t} = 24$ $m = 24t$

ე.ი. 12 18 156 შეიძლება იყოს ერთი და იმავე არითმეტიკული პროგრესიის წევრები, ზოგადად
 $12 = a_k$ $18 = a_{k+t}$ $156 = a_{k+24t}$

თუ ავიღებთ ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას, $k=1, t=1$;

$12 = a_1$ $18 = a_2$ $156 = a_{25}$ $d=6$

19. ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება დავუშვათ $b > a > c$.

აუცილებლობა: ვაჩვენოთ, რომ თუ b, a და c არიან პროგრესიის წევრები, მაშინ $\frac{a-b}{b-c} \in \mathbb{Q}$

ვთქვათ, $b = a_k$ $a = a_{k+t}$ $c = a_{k+m}$ მე-16 ამოცანის მიხედვით ვწერთ

$$d = \frac{a-b}{t} = \frac{c-b}{m} \quad \frac{a-b}{c-b} = \frac{t}{m} \quad \frac{a-b}{b-c} = -\frac{t}{m} \in \mathbb{Q} \quad \text{რ.დ.გ.}$$

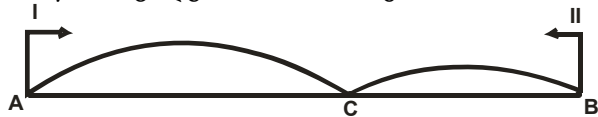
საკმარისობა: თუ სრულდება პირობა $\frac{a-b}{b-c} \in \mathbb{Q}$, მაშინ ვაჩვენოთ, რომ $b; a$ და c იქნებიან
 არითმეტიკული პროგრესიის წევრები (არა აუცილებლად მეზობელი)

რადგან $\frac{a-b}{b-c} \in \mathbb{Q}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{t}{m}$ (ზოგადობის შეუზღუდავად

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{t}{m} > 0$).

$$\frac{a-b}{t} = \frac{b-c}{m} \equiv d. \text{ რ.დ.გ.}$$

22. წარმოვადგინოთ ნახაზზე:



A წერტილის გზის I ბოლო წერტილი გზის II ბოლო C შეხვედრის ადგილი

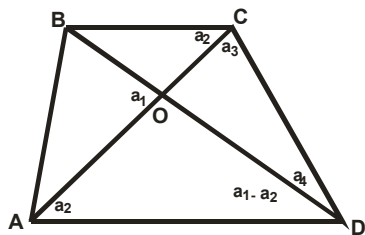
ვთქვათ, სატკეპნი მანქანები შეხვდებიან x წთ-ში. I მანქანა მოძრაობს მუდმივი 5მ/წმ სიჩქარით. გავლილი მანძილი $5x$ მ, $AC=5x$ II თითოეულ წუთში გავლილი მანძილები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას

$$a_1=1,5 \quad d=0,5 \quad n=x$$

$$\text{II მანქანის შეხვედრამდე გავლილი მანძილი } BC=S_x=\frac{2 \cdot 1,5 + 0,5(x-1)}{2}x$$

$$\text{რადგან ვიცით } AC+BC=AB=90 \quad \text{ჩავწერთ განტოლებას}$$

23.



$$\angle AOB=a_1 \quad \angle ACB=a_2 \quad \angle ACD=a_3 \quad \angle BDC=a_4 \quad a_1 \text{ AOD}$$

$$\text{სამკუთხედის გარე კუთხეა, ამიტომ } \angle ADO=a_1-a_2$$

$$\text{არითმეტიკული პროგრესიის თვისებით } a_1+a_4=a_2+a_3 \Rightarrow$$

$$a_1-a_2+a_4=a_3 \quad a_1-a_2+a_4=\angle ADC \quad a_3=\angle ACD$$

$$\angle ADC = \angle ACD, \text{ ე.ი. } \triangle ACD \text{ ტოლფერდაა } CD \text{ ფუძით, ამიტომ } AD=AC=1$$

$$24. (1+x+x^2)+(2+5x+x^2)+\dots+(10+37x+x^2)=255 \quad \text{გადავწეროთ ასე}$$

$(1+x)+(2+5x)+\dots+(10+37x)+10x^2=255$ უნდა შევამჩნიოთ, რომ $(1+x)(2+5x)\dots(10+37x)$ ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას I წევრით $a_1=(1+x)$ $d=(2+5x)-(1+x)=4x+1$ (მართლაც რომ გამოვთვალოთ $a_{10}=a_1+9d$ მივიღებთ $a_{10}=x+1+9(4x+1)=10+37x$).

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10=\frac{x+1+10+37x}{2} \cdot 10=5(38x+11) \text{ მოცემული განტოლება გადაიწერება ასე}$$

$$5(38x+1)+10x^2=255$$

35. მიმდევრობა რომ იყოს გეომეტრიული პროგრესია, აუცილებელი და საკმარისია რომ ზოგადად შესრულდეს 1) $b_n^2=b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

ან 2) $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ შეფარდება იყოს მუდმივი სიდიდე n -ისგან დამოუკიდებელი ყველა $n \in \mathbb{N}, n > 1$

$$\text{მოც: } S_n=3 \cdot 2^n - 3$$

$$x_n=S_n-S_{n-1}=(3 \cdot 2^n - 3) - (3 \cdot 2^{n-1} - 3)=3 \cdot 2^{n-2} \quad x_{n-1}=S_{n-1}-S_{n-2}=3 \cdot 2^{n-3} \quad \frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{3 \cdot 2^{n-3}}=2 \quad \text{ე.ი. } (x_n)$$

მიმდევრობა არის გეომეტრიული პროგრესია მნიშვნელით $q=2$

$$36. \begin{cases} b_3 - b_1 = 15 \\ b_4 - b_2 = 6 \end{cases}$$

ვთქვათ, გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელია q . სისტემა გადაიწერება

$$\text{ასე } \begin{cases} b_1 q^2 - b_1 = 15 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 6 \end{cases}$$

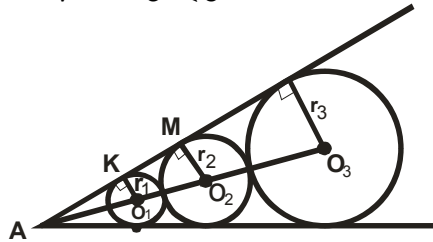
$$\text{უნდა ვიპოვოთ } S_{10} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}$$

$$\begin{cases} b_1(q^2 - 1) = 15 \\ b_1 q(q^2 - 1) = 6 \end{cases}$$

გავყოთ სისტემის II განტოლება I-ზე,

$$\text{მივიღებთ; } \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ b_1(q^2 - 1) = 15 \end{cases}$$

41. წარმოვადგინოთ ნახაზი



$\angle A = 60^\circ$ $\angle O_1AK = 30^\circ$ მართკუთხა $\triangle AO_1K$ -დან
 $AO_1 = 2r_1$, $\triangle AO_2M$ -დან $AO_2 = 2r_2$ $AO_2 - AO_1 = O_1O_2$
 $2r_2 - 2r_1 = r_1 + r_2$ $r_2 = 3r_1$ ზუსტად ასევე, $r_3 = 2r_2$ და
 ა.შ.

ე.ი. $r_1; r_2; r_3; \dots, r_n$ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას მნიშვნელით $\frac{r_2}{r_1} = q = 3$, I წევრი $r_1 = R$

$$r_{10} = r_1 \cdot q^9 = 3^9 \cdot R \quad r_n = r_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1} \cdot R$$

42. რადგან x, y და z ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას, სრულდება ტოლობები:

$$\begin{cases} y = \frac{x+z}{2} \\ y^2 = xz \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 = xz \Rightarrow (x-z)^2 = 0 \quad x=z \quad \frac{z}{x} = q^2 = 1 \quad q=1 \text{ ან } q=-1$$

მაგრამ $q=-1$ არ შეიძლება, რადგან როცა $q < 0$ x, y, z წევრები იქნებიან ნიშანმონაცვლე. ვთქვათ, თუ I წევრი დადებითია, II იქნება უარყოფითი, III ისევ დადებითი და ა.შ. რაც შეუძლებელია, იმიტომ რომ x, y და z არითმეტიკულ პროგრესიასაც ადგენენ. არითმეტიკული პროგრესია კი ან ზრდადია, როცა $d > 0$ ან კლებადი, როცა $d < 0$ ე.ი. $q=1$

$x=y=z=a$ სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია $a \in \mathbb{R}$.

44. **I ხერხი** ვთქვათ, ეს სამი რიცხვია $a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 \quad \text{მაგრამ } a_1 + a_3 = 2a_2 \quad 3a_2 = 15 \quad a_2 = 5$$

ავღნიშნოთ არითმეტიკული პროგრესიის მნიშვნელი d -თი.

$$a_1 = 5-d \quad a_3 = 5+d \quad \text{ამოცანის პირობის მიხედვით,}$$

$$(5-d+1)=6-d \quad (5+1)=6 \quad (5+d+9)=14+d \quad \text{ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.}$$

გეომეტრიული პროგრესიის ძირითადი თვისებებით

$$6^2 = (6-d)(14+d)$$

45. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვები a, b, c, d . a, b, c ადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, მნიშვნელი ავღნიშნოთ q -თი. $b=aq \quad c=aq^2$

$$b; c; d; \text{ ადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას } 2c=b+d \quad d=2c-b=2aq^2-aq$$

$$\text{ე.ი. ეს ოთხი რიცხვია } a; aq; aq^2; (2aq^2-aq)$$

პირობის თანახმად ჩავწერთ განტოლებათა სისტემა
$$\begin{cases} 2aq^2 - aq + 2 = 32 \\ aq + aq^2 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(2q^2 - q + 1) = 32 \\ aq(1 + q) = 24 \end{cases}$$

გავყოთ სისტემის განტოლებაზე და გავიგებთ.

46. (ზოგადად) თუ მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით

$a_n = kn + b$, სადაც b და k ნებისმიერი რიცხვებია, მაშინ ეს მიმდევრობა არის არითმეტიკული

პროგრესია $d=k$ $a_n = \frac{5n+2}{7} = \frac{5}{7}n + \frac{2}{7}$

ე.ი. ეს მიმდევრობა არის არითმეტიკული პროგრესია $d = \frac{5}{7}$

$a_1 = 1$ $a_{70} = \frac{352}{7}$ $s_{70} = \frac{a_1 + a_{70}}{2} \cdot 70$

47. $2^2 - 4^2 + 6^2 - 8^2 + \dots + (4k-2)^2 - (4k)^2$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მიმდევრობაში სულ არის $2k$ წევრი. დავაჯგუფოთ ასე:

$(2^2 - 4^2) + (6^2 - 8^2) + (10^2 - 12^2) + \dots + (4k-2)^2 - (4k)^2 = -2 \cdot 6 - 2 \cdot 14 - 2 \cdot 22 - \dots = -2(6 + 14 + 22 + \dots)$

ფრჩხილებში სულ არის k წევრი, რომლებიც ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას

$a_1 = 6$ $d = 8$ წევრთა რაოდენობა $n = k$

$S_n = 6 + 14 + 22 + \dots = S_n = S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \frac{12 + 8(k-1)}{2} \cdot k = 2k(2k+1)$

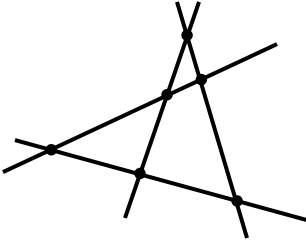
IV თავი

§1. საწყისი გეომეტრიული ცნებები.

1. $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

პასუხი: 6

2.



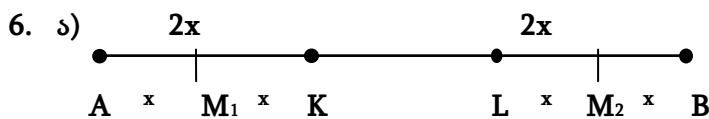
პასუხი: 6

3. პასუხი: ა) 8სმ, ბ) 16სმ.

4. თუ K, L და M წერტილებს შორისაა, $KM=10-6=4$ (სმ)
თუ $L \in MK$ მონაკვეთს, $KM=10+6=16$ (სმ)

პასუხი: 4სმ; 16სმ.

5. პასუხი: ა) $\frac{7a}{8}$; ბ) $\frac{5a}{8}$.



$$AB=m$$

$$AK=KL=LB=2x$$

$$6x=m \Rightarrow 2x=\frac{m}{3}$$

$$ა) AM_1=M_1K; LM_2=M_2B$$

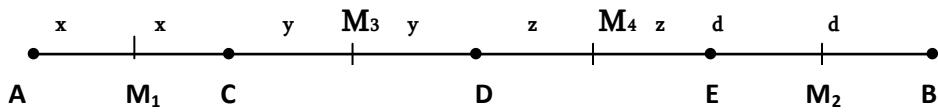
$$M_1M_2=4x=\frac{2m}{3}$$

$$ბ) AB=m=10x \Rightarrow 2x=\frac{m}{5}$$

M_1 და M_2 კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებია, მაშინ

$$M_1M_2=10x-2x=8x=\frac{4m}{5}$$

7.



$$AB=36\text{სმ}; \quad AM_1=M_1C; \quad CM_3=M_3D; \quad DM_4=M_4E; \quad EM_2=M_2B$$

$$2x+2y+2z+2d=36 \quad \Rightarrow \quad x+y+z+d=18 \quad (1)$$

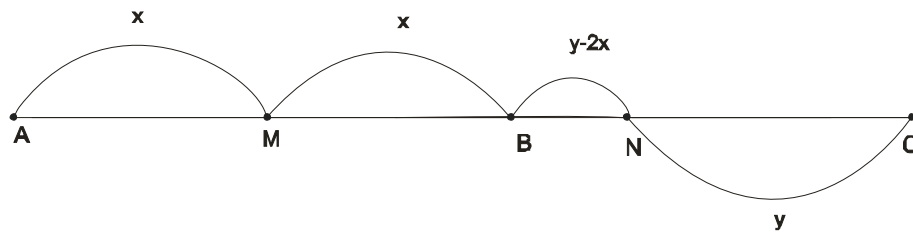
$$x+2y+2z+d=30 \quad (2)$$

$$\text{თუ (2)-ს გამოვაკლებთ (1)-ს, მივიღებთ: } y+z=12=M_3M_4$$

პასუხი: 12სმ

8. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) $N \in BC$; ბ) $B \in NC$

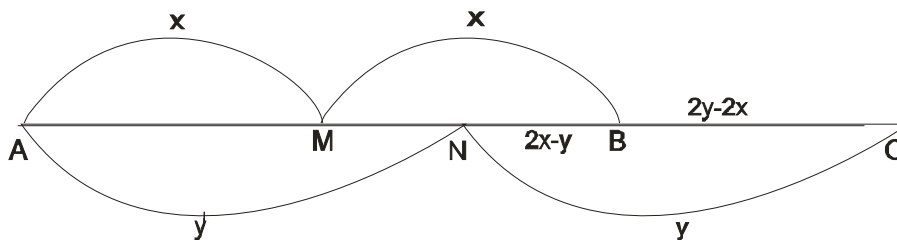
ა)



$$(AM=MB \equiv x \quad AN=NB \equiv y) \Rightarrow$$

$$(BC=2y-2x \quad MN=y-x) \Rightarrow \quad BC=2MN$$

ბ)



$$\left. \begin{array}{l} AM=MB \equiv x \\ AN=NC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

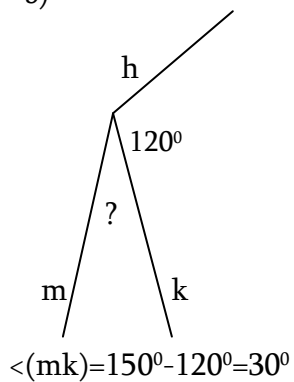
$$MN=y-x, \text{ ხოლო } NB=2x-y \Rightarrow$$

$$BC=y-(2x-y)=2y-2x=2MN, \quad \text{რ.დ.გვ.}$$

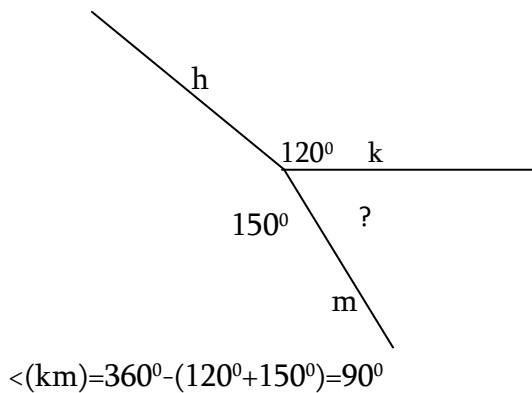
9. $\angle AOC=50^\circ-35^\circ=15^\circ$; ა5

$$\angle AOC=35^\circ+50^\circ=85^\circ$$

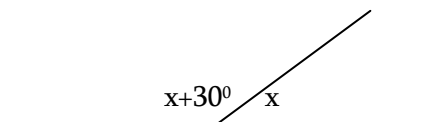
10. ს)



ბ)



11. ს)



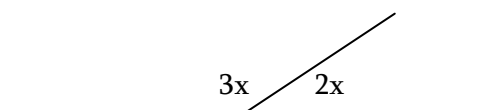
$$2x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 150^\circ$$

$$x = 75^\circ$$

$$x + 30^\circ = 105^\circ$$

ბ)



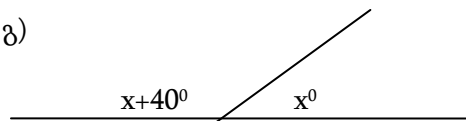
$$5x = 180^\circ$$

$$x = 36^\circ$$

$$2x = 72^\circ;$$

$$3x = 108^\circ$$

გ)



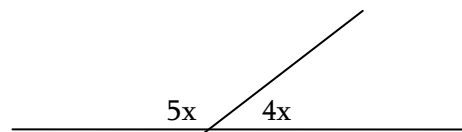
$$2x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 140^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

$$x + 40^\circ = 110^\circ$$

დ)

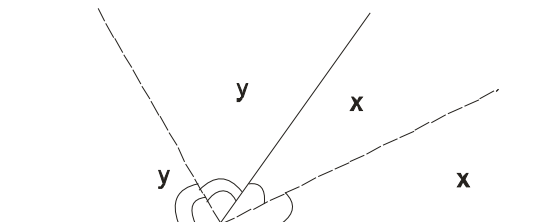


$$9x = 180^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

$$4x = 80^\circ; \quad 5x = 100^\circ$$

12.



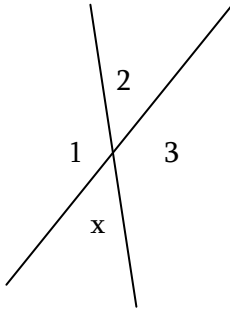
$$2x + 2y = 180^\circ$$

$$x + y = 90^\circ$$

პასუხი: 90°

14. პასუხი: 25° ; 155°

15.

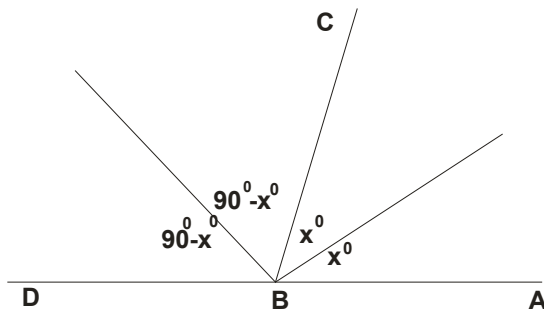


$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 3x$$

$$\text{სმიტომ } 4x = 360^\circ$$

$$x = 90^\circ$$

16.



$$\angle ABD = 2x + 180^\circ - 2x = 180^\circ$$

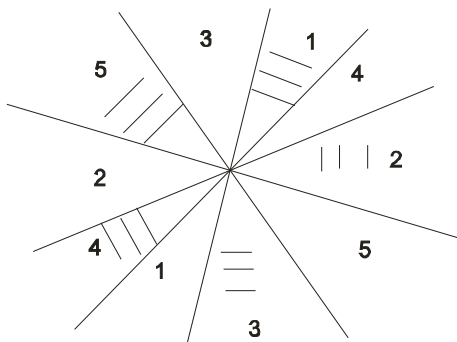
შ.ო. $B \in AD$

17.

$$\begin{cases} AB = a \cdot CD \\ CD = b \cdot AB \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{b}$$

$$\text{პასუხი: } a = \frac{1}{b}$$

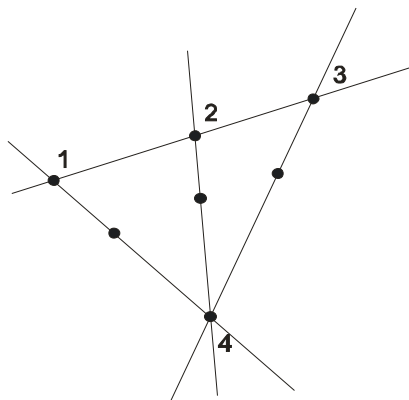
18.



$$2 \cdot (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5) = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

19.



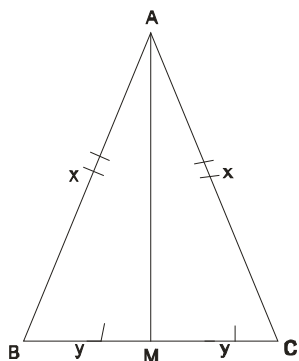
ვთქვათ, 3 წერტილი ერთ წრფეზეა, ხოლო მე-4 არ ეკუთვნის მას. მაშინ (1;4); (2;4); (3;4) წერტილთა წყვილებზე გამავალი 3 წრფე დამატებით შეიცავს ახალ 3 წერტილს. ამ შემთხვევაში წერტილთა რაოდენობა უკვე აღემატება 6-ს. ე.ი. წერტილი 4-იც იმავე წრფეზეა, რომელზეც 1, 2 და 3.

ანალოგიურად, ყველა წერტილი ერთ წრფეზეა.

§2. სამკუთხედები.

1. 4სმ; 6სმ; 5სმ.

3.



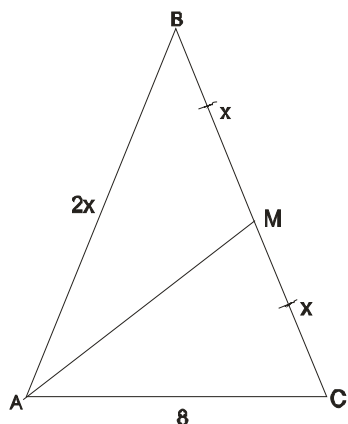
$$AB=AC \equiv x$$

$$BM=MC \equiv y$$

$$P_{ABC}=2x+2y=32 \Rightarrow x+y=16$$

$$P_{ABM}=x+y+AM=24 \Rightarrow AM=24-(x+y)=8(\text{სმ})$$

5.



$$BM=MC \equiv x \Rightarrow AB=2x$$

გვაქვს ორი შემთხვევა:

$$ა) P_{ABM} > P_{AMC}$$

$$ბ) P_{ABM} < P_{AMC}$$

შესაბამისად, გვექნება ტოლობები:

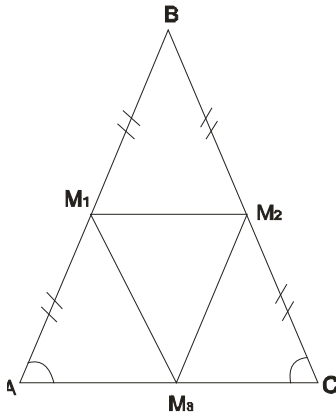
$$ა) 3x-(x+8)=2 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5(\text{სმ})$$

და სამკუთხედის გვერდებია 10სმ; 10სმ და 8სმ.

ბ) $x+8-3x=2 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3(\text{სმ})$ და სამკუთხედის გვერდებია 6სმ; 6სმ და 8სმ.

9.

9.



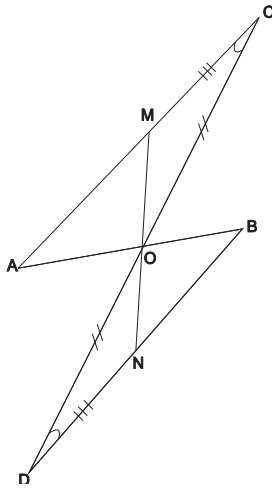
განვიხილოთ $\triangle AM_1M_3$ და $\triangle CM_2M_3$ $\angle A = \angle C$, როგორც ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხეები.

$AM_1 = CM_2$, როგორც ტოლ AB და BC ფერდა ნახევრები. სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად, $\triangle AM_1M_3 = \triangle CM_2M_3 \Rightarrow$

$M_1M_3 = M_2M_3$, ანუ

$\triangle M_1M_2M_3$ ტოლფერდაა M_1M_2 ფუძით.

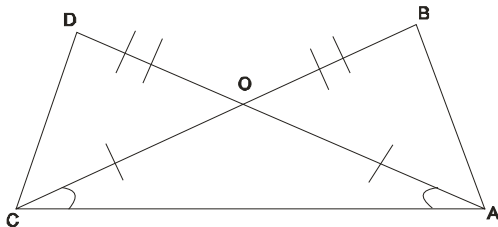
11.



$\triangle AOC = \triangle BOD$ (Δ -ების ტოლობის I ნიშნის თანახმად) $\Rightarrow$

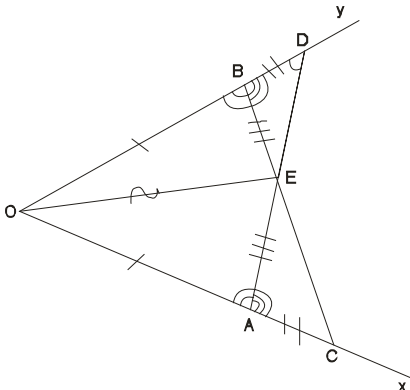
$AC = BD$; $\angle ACO = \angle BDO$, ხოლო რადგან M და N ტოლი AC და BD-ს შუაწერტილებია, $MC = DN$. სამკუთხედის ტოლობის I ნიშნის თანახმად, $\triangle MCO = \triangle NOD \Rightarrow \angle MOC = \angle NOD$ და $MO = NO$. რადგან OC და OD დამატებითი სხივებია და $\angle MOC = \angle NOD \Rightarrow OM$ და ON -იც დამატებითი სხივებია, თანაც $OM = ON$ რ.დ.გ.

16.



$\angle OAC = \angle OCA \Rightarrow CO = AO$, ხოლო რადგან $BC = AD$, ამიტომ $BO = DO$ და $\triangle ABO = \triangle CBO$ სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად.

18.

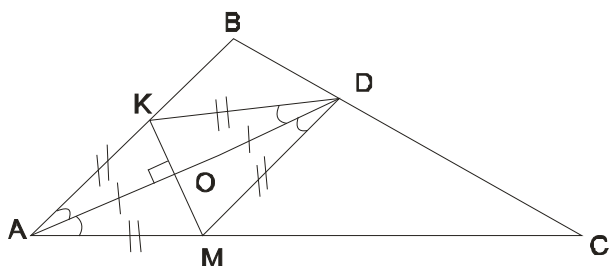


$\triangle ODA = \triangle OCB$ (სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად)
 $\Rightarrow \angle ODA = \angle OCB$ და $\angle OAD = \angle OBC$
 $\Rightarrow \angle DBE = \angle CAE$, (როგორც ტოლ კუთხეთა მოსაზღვრე კუთხეები).
 ასეთ შემთხვევაში $\triangle BDE = \triangle ACE$
 ე.ი. $BE = AE$.

აღმოჩნდა, რომ $\triangle OBE$ და $\triangle OAE$ -ს სამივე გვერდი ტოლი აქვთ და მაშასადამე, სამკუთხედების ტოლობის III ნიშნის თანახმად, ისინი ტოლია, საიდანაც $\angle BOE$ და $\angle AOE$ კუთხეები ტოლია. რ. დ. გვ.

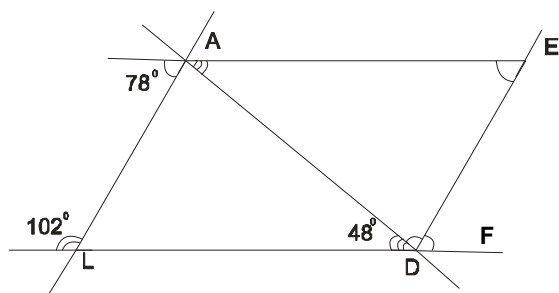
19. $\triangle BEC = \triangle FED$ (სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად) $\Rightarrow \angle DFE = \angle CBE \Rightarrow AD \parallel BC$, რადგან $KE \parallel AD$, ხოლო $AD \parallel BC \Rightarrow KE \parallel BC$

20.



OK AD-ს შუამართობია, ამიტომ $AK = KD$, ასევე $AM = MD$, ე.ი. $\angle KAD = \angle KDA = \angle OAM = \angle ODM$, $\angle KAO$ და $\angle OMD$ კუთხეების ტოლობა კი იწვევს AB და MD-ს პარალელურობას.

22.



რადგან $78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$, ამიტომ

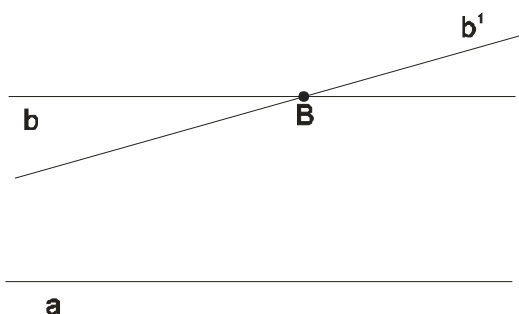
$AE \parallel DF \Rightarrow$ შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები $\angle EAD = \angle ADF = 48^\circ$

$\angle ADF$ არის $\angle ADE$ -ის მოსაზღვრე, ამიტომ $\angle ADF = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$, ხოლო

$\angle ADE$ მისი ნახევარია და უდრის 66° . $\triangle AED$ -ს მესამე კუთხე $\angle AED = \angle EDF = 66^\circ$.

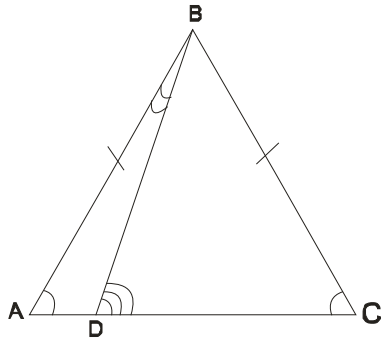
პასუხი: 48° ; 66° ; 66°

23.



b წრფის B წერტილზე გავავლოთ a-ს პარალელური b' წრფე. პირობის თანახმად, რადგან ის b-ს მკვეთი წრფეა, a-ც უნდა გადაკვეთოს. ეს კი შეუძლებელია, ე.ი. b' ემთხვევა b-ს და $b \parallel a$.

26.



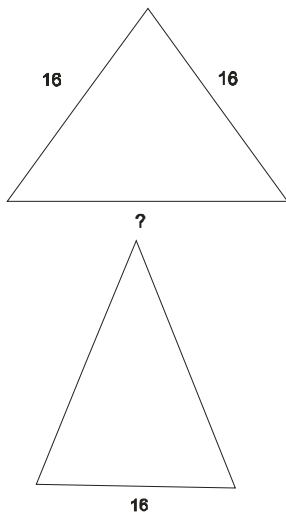
$\triangle ABC$ ტოლფერდაა $\Rightarrow \angle A = \angle C$
 ხოლო $\triangle BDC$ -ში $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$,
 როგორც $\triangle ABD$ -ს გარე კუთხე, ამიტომ
 $\angle BDC > \angle A = \angle C \Rightarrow BC > BD$

34. ა) 7-ის ტოლილ შეიძლება იყოს მხოლოდ ფერდი, ამიტომ პერიმეტრი იქნება 17.

ბ) 8სმ-იანი ფუძე ვერ იქნება. ფერდი როცა უდრის 8სმ-ს, $p = 2 \cdot 8 + 2 = 18$ (სმ).

გ) $p = 25$ სმ

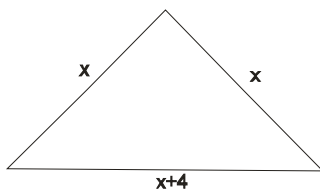
35. გარე კუთხეთა ტოლობა ნიშნავს, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა. თუ:



ა) ფერდს ჩავთვლით 16სმ-ის ტოლად, ფუძე გამოვა 42სმ. ასეთი სამკუთხედი კი არ არსებობს.

ბ) ფუძეს ჩავთვლით 16სმ-ის ტოლად, ფერდი გამოვა 29სმ-ის ტოლი.

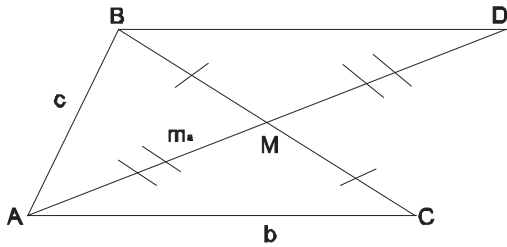
36. რადგან გარე კუთხე მახვილია, სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, რომელიც ფუძის მოპირდაპირე შეიძლება იყოს, ე.ი. ფუძე მეტია ფერდზე.



გვაქვს ტოლობა
 $3x + 4 = 25$
 $3x = 21$
 $x = 7$

პასუხი: 7სმ; 7სმ; 11სმ

50.



$$AM \equiv m_a; AB=c, AC=b$$

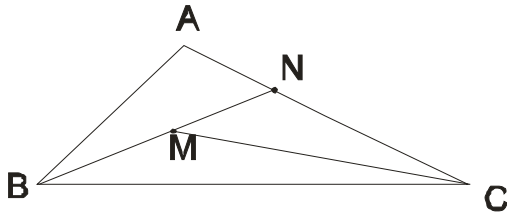
AM გავაგრძელოთ M წერტილის
მხარეს m_a -ს ტოლი MD
მონაკვეთით.

$$\triangle AMC = \triangle DMB \Rightarrow AC=BD=b$$

$\triangle ABD$ -ში სამკუთხედის უტოლობის თანახმად,

$$2m_a < c+b \Rightarrow m_a < \frac{b+c}{2}, \text{ რ. დ. გვ.}$$

51.



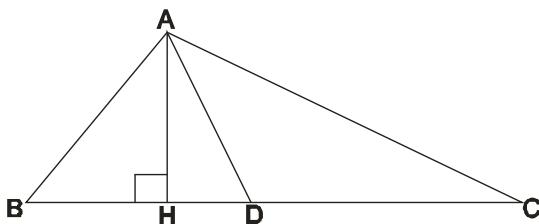
BM გავაგრძელოთ AC-ს
გადაკვეთამდე N წერტილში.
გამოვიყენოთ სამკუთხედის
უტოლობა $\triangle ABN$ -სა $\triangle MNC$ -ში.

$$BM+MN < AB+AN \quad \text{და} \quad MC < MN + NC \quad \Rightarrow \quad BM+MN+MC < AB+AN+MN+NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM+MC < AB+AC \quad \text{რ. დ. გ.}$$

52.მითითება: დავწეროთ ამოცანა 51-ში დამტკიცებული უტოლობა შიგა წერტილიდან
წვეროებამდე მანძილების ნებისმიერი წყვილისთვის.

55.

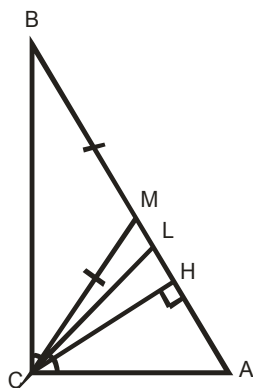


$$\angle HAD = \angle BAD - \angle BAH =$$

$$\frac{180^\circ - (\angle B + \angle C)}{2} - (90^\circ - \angle B) =$$

$$= \frac{\angle B - \angle C}{2}, \text{ რ. დ. გ.}$$

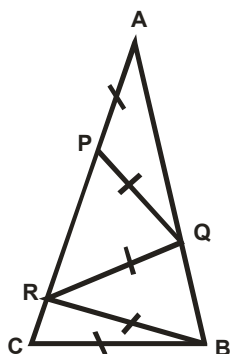
56.



$\triangle ABC$ -ში $\angle C = 90^\circ$ CH სიმაღლეა, CL-
ბისექტრისა, CM-მედიანა.

$\angle A \equiv \alpha \Rightarrow \angle HCA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle LCH = 45^\circ -$
 $(90^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ. \quad \angle B = 90^\circ - \alpha = \angle BCM,$
რადგან CM მედიანა ჰიპოტენუზის
ნახევრის ტოლია, მაშინ $\angle MCL = 45^\circ - (90^\circ - \alpha) =$
 $= \alpha - 45^\circ$ ე.ი. $\angle MCL = \angle HCL$ რ. დ. გვ.

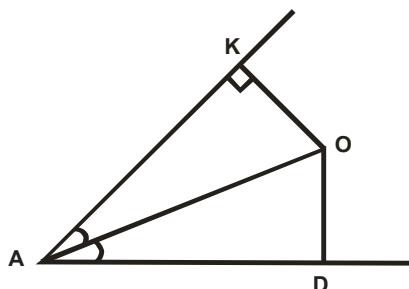
57.



$\angle A \equiv \alpha \Rightarrow \angle Q \equiv \alpha \Rightarrow \angle RPQ = 2\alpha \Rightarrow$
 $\angle PQR = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow \angle RQB = 3\alpha \Rightarrow$
 $\angle QRB = 180^\circ - 6\alpha \Rightarrow \angle BRC = \angle C = 4\alpha = \angle B$
 $\triangle ABC$ -ში $4\alpha + 4\alpha + \alpha = 180^\circ$
 $9\alpha = 180^\circ,$
 $\alpha = 20^\circ$

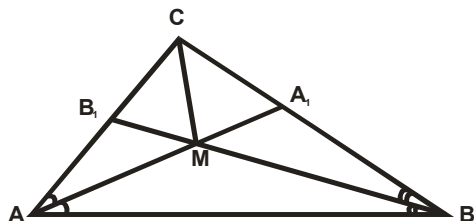
§3. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, აგების ამოცანები.

3.



$\angle A = 60^\circ$ $OK \perp AK$ AO ბისექტრისაა,
 $KO = OD = r$, ამიტომ $AO = 2r = 10$ სმ.

4.



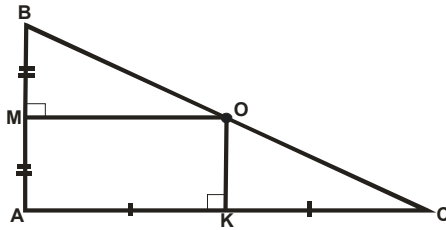
ა) $\angle AMB = 136^\circ \Rightarrow$
 $\angle MAB + \angle MBA = 44^\circ \Rightarrow$
 $\angle A + \angle B = 88^\circ \Rightarrow \angle ACB = 92^\circ \Rightarrow$
 $\angle ACM = \angle BCM = 46^\circ$ (CM-ივ
ბისექტრისაა)

ბ) ანალოგიურად $\angle ACM = \angle BCM = 111^\circ - 90^\circ = 21^\circ$

5. ა) $AD = 3,5$ სმ; $CD = 5$ სმ

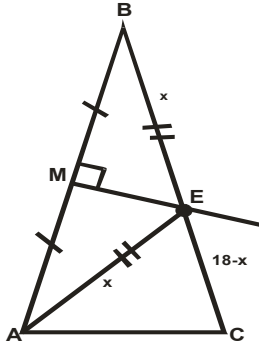
ბ) $AC = 14,6$ სმ

6.



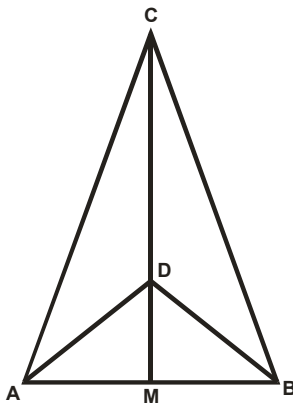
რადგან OK და OM შუამართობებია,
 $CO=AO=BO \Rightarrow O$ შემოხაზული
 წრეწირის ცენტრია, $\Rightarrow$
 $\angle A = 90^\circ = \angle B + \angle C$.

7.



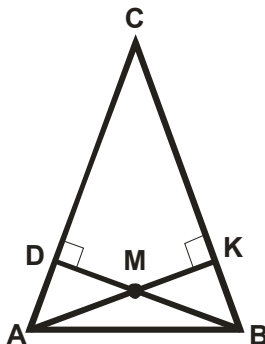
რადგან ME შუამართობია, $BE=AE$
 $\equiv x \Rightarrow EC = 18-x$; $P_{\triangle AEC} = 27 =$
 $AE+EC+AC \Rightarrow x+18-x+AC = 27$
 $\Rightarrow AC=9$ (სმ)

8.

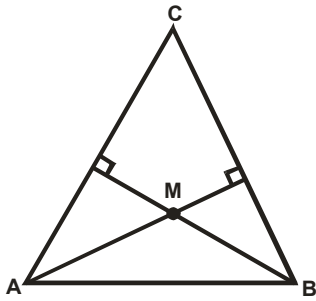


რადგან $AD=BD \Rightarrow D$ წერტილი
 AB -ს შუამართობზეა, $AC=BC \Rightarrow C$
 AB -ს შუამართობზეა.
 რადგან AB -ს შუამართობი
 ერთადერთი წრფეა, სწორედ მას
 ეკუთვნის C და D წერტილები და
 პირიქით, C და D -ზე გამავალი
 ერთადერთი წრფე AB -ს
 შუამართობია

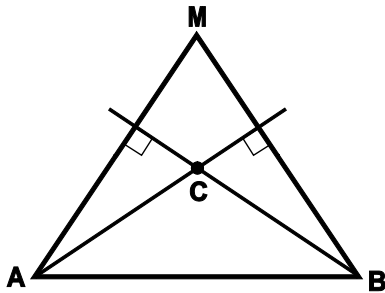
10.



ბ) $\angle M = 150^\circ \Rightarrow$
 $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ \Rightarrow$
 $\angle KBA = \angle DAB = 75^\circ \Rightarrow$
 $\angle C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$



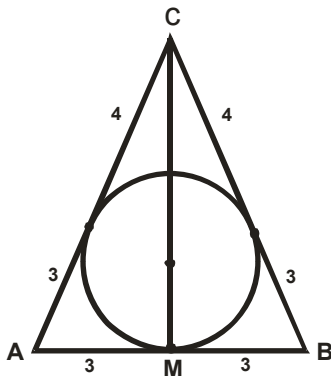
გ) $\angle C = 50^\circ \Rightarrow$
 $\angle AMB = 130^\circ$



დ) რადგან $\angle M = 40^\circ \Rightarrow \angle C$ ზღაგვია.

გვაქვს ნახაზი
 $\angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

12.



$AC=BC$, ჩახაზული წრეწირის
 ცენტრი CM ბისექტრისა -სიმაღლე
 - მედიანაზეა. ამასთან, მხებთა
 მონაკვეთები შეხებამდე ტოლია.
 ამიტომ $P_{\triangle ABC} = (3+4) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20$ (სმ)

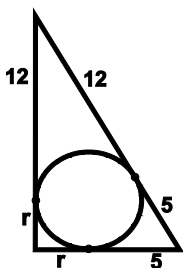
პასუხი: $P_{\triangle ABC} = 20$ სმ.

13. კათეტებია a და b , ჰიპოტენუზაა c .

ა) $a+b-26=2r=8$

$a+b=34$

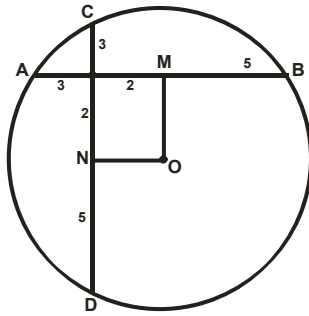
$P=a+b+c= 34+26 = 60$ (სმ)



ბ) $17^2 = (12+r)^2 + (5+r)^2 \Rightarrow r=3$

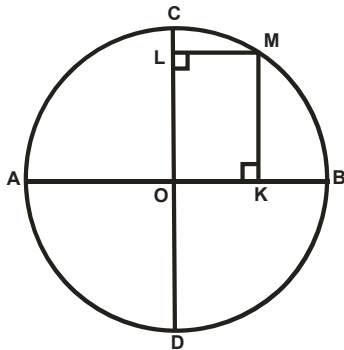
$P= 15 + 8 + 17 = 40$ (სმ)

16.



$OM \perp AB$; $ON \perp CD$ $AB=CD=10$ სმ
 OM და ON -ით ქორდები შუაზე იყოფა,
 ამიტომ $OM=ON=2$ სმ

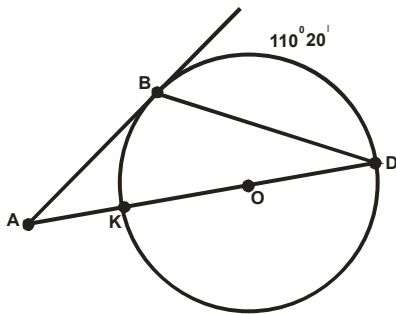
18.



$2R=10$ სმ
 მართობთა ფუძეებს შორის LK
 მანძილი OM მონაკვეთის ტოლია
 და უდრის 5 სმ.

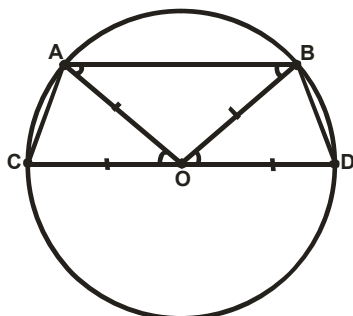
19. თუ რკალთა ზომებს აღვნიშნავთ α ; 2α და 3α -თი, მივიღებთ ტოლობას:
 $6\alpha=360^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$; $2\alpha=120^\circ$; $3\alpha=180^\circ$ ე.ი. სამკუთხედის კუთხეებია 30° ; 60° და 90° .
 უდიდესი გვერდი კი ჰიპოტენუზაა და დიამეტრის ტოლია, ანუ 14 სმ-ის.

30.



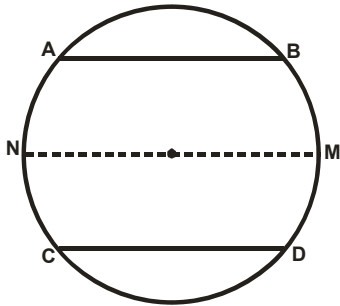
$$\begin{aligned} \text{რკალი } KB &= 69^\circ 40' \\ \angle D &= \frac{69^\circ 40'}{2} = \frac{68^\circ 100'}{2} = 34^\circ 50' \\ \angle A &= \frac{BD - KB}{2} = \frac{75^\circ 30'}{2} = 37^\circ 45' \end{aligned}$$

31. ჯერ დავამტკიცოთ ამოცანა მაშინ, როცა ერთ-ერთი ქორდა დიამეტრია.



$\angle OAB = \angle OBA$ როგორც ტოლფერდა
 $\triangle AOB$ -ს ფუძესთან მდებარე
 კუთხეები. ხოლო რადგან $AB \parallel CD$,
 $\angle BAO = \angle AOC = \angle ABO = \angle BOD \Rightarrow$
 რკალი AC უდრის BD რკალს.

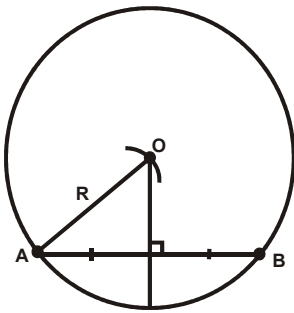
შემდეგ უკვე ნებისმიერი პარალელური ქორდებისთვის რკალებს გავზომავთ ნაწილ-ნაწილ:



$$\widehat{AC} = \widehat{AN} + \widehat{CN}$$

$$\widehat{BD} = \widehat{BM} + \widehat{DM}$$

36. თუ A და B მოცემული წერტილებია, წრეწირის ცენტრი AB-ს შუამართობზეა და A-სგან დაშორებულია რადიუსის ტოლი მანძილით. ე. ი. A -დან მოცემული რადიუსით შემოხაზული რკალის შუამართობთან კვეთის წერტილი ასაგები წრეწირის O ცენტრია. AO კი რადიუსია.



ამოცანას არ აქვს ამონახსნი, როცა $R < \frac{AB}{2}$;

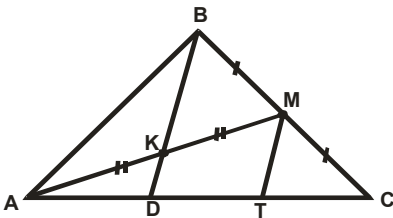
აქვს ამონახსნი, როცა $R = \frac{AB}{2}$;

ხოლო როცა $R > \frac{AB}{2}$, ასაგები წრეწირის ცენტრად გამოდგება O-ს სიმეტრიულიც AB-ს მიმართ.

§4. მრავალკუთხედები, სამკუთხედების ამოხსნა

6. სამკუთხედში თუ გავავლებთ ნებისმიერ შუახაზს, მოჭრილი სამკუთხედი დარჩენილ ოთხკუთხედს შეავსებს პარალელოგრამამდე.

8.

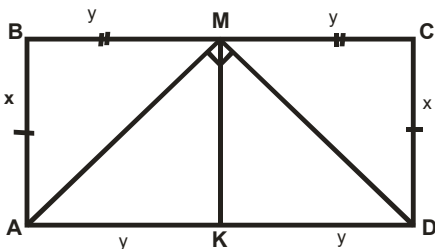


M-ზე გავავლოთ BD-ს

პარალელური MT.

$$TC=DT=AD \Rightarrow AD = 6 \text{ სმ}$$

11.



$$AM=MD \Rightarrow \triangle AMD \text{ ტოლფერდაა.}$$

მისი MK სიმაღლე მედიანაცაა და

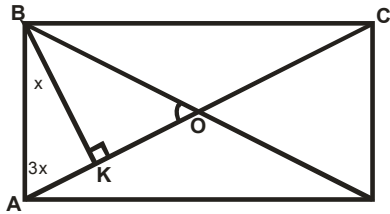
$$\text{უდრის } \frac{AD}{2} = y = x$$

$$\text{ამიტომაც } 2(x + 2x) = 24(\text{მ})$$

$$x=4(\text{მ}) \Rightarrow 2y=8(\text{მ})$$

პასუხი: $AB=4\text{მ}$; $AD=8\text{მ}$

12.



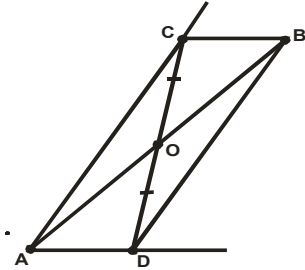
$$\angle CBK = \angle BAK = 3x, 4x = 90^\circ$$

$\triangle AOB$ ტოლფერდაა $\Rightarrow$

$$\angle OBK = 2x \Rightarrow$$

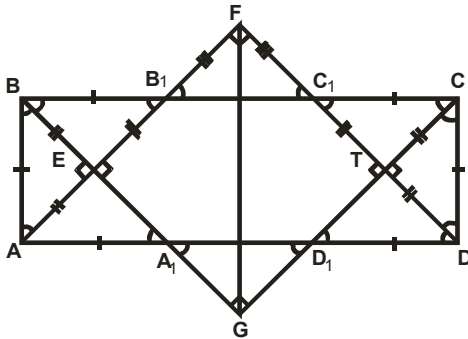
$$\angle BOK = 90^\circ - 2x = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

18.



AO გავაგრძელოთ მისი ტოლი OB
მონაკვეთით. B წერტილზე გავავლოთ
კუთხის გვერდების პარალელური
წრფეები. მიღებული ACBD
ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
ამიტომ CD სამეზბნი წრფეა.

27.



ნახაზზე ყველა მონიშნული

კუთხე 45° -იანია.

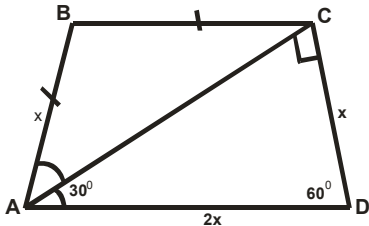
EFTG კვადრატია.

$$ET = FG$$

$$ET = AD - \left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \right) = 3 - 1 = 2 (\text{სმ})$$

პასუხი: 2 სმ

32.



$$AD = 2CD = 2x$$

AC ბისექტრისაა $\Rightarrow \triangle ABC$ ტოლფერდაა

მაგრამ, რადგან $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = CD = x$

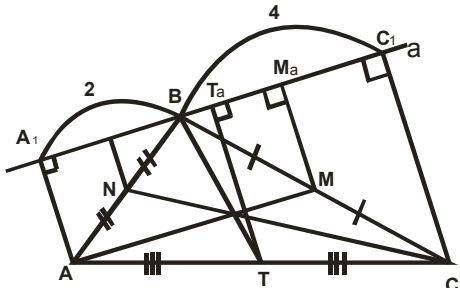
გვაქვს ტოლობა: $5x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$

$$2x = AD = 8 (\text{სმ}).$$

პასუხი: 8 სმ

33. ტრაპეციის შუახაზის თვისების თანახმად, მონაკვეთთა სიგრძეები ქმნიან
არიტმეტიკულ პროგრესიას. ამიტომ მათი ზომები იქნება: 13სმ; 16სმ; 19სმ; 22სმ; 25სმ.

39.



$$A_1B = 2 \text{ სმ}; C_1B = 4 \text{ სმ}.$$

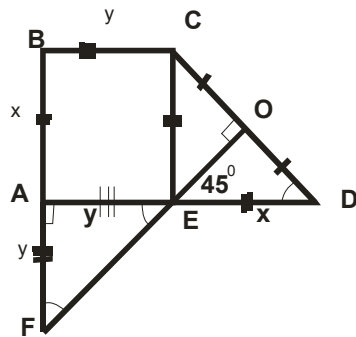
AM მედიანის გეგმილი a წრფეზე
არის A_1M_a

$$A_1M_a = A_1B + BM_a = 2 + 2 = 4$$

ანალოგიურად CN-ის გეგმილი
უდრის $4 + 1 = 5$ (სმ)

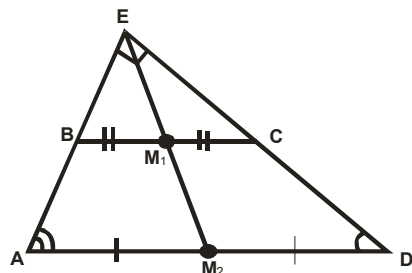
$$BT \text{ მედიანის გეგმილი უდრის } \frac{A_1C_1}{2} - A_1B = 3 - 2 = 1 (\text{სმ}).$$

45.



CD-ს შუამართობი AD-ს კვეთს E
წერტილში და $\triangle CED$ მართკუთხაა
 $\Rightarrow CE=ED=AB=x$;
ხოლო $BC=AE=AF=y$
ამიტომ $BF=AD=a$

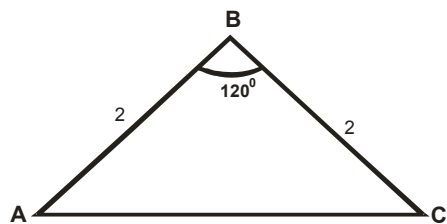
46.



AB და DC ფერდების გაგრძელებები
მართი კუთხით იკვეთებიან E
წერტილში, ხოლო $M_1 \in EM_2$,
ამასთან, $EM_1=BM_1$; $EM_2=AM_2$

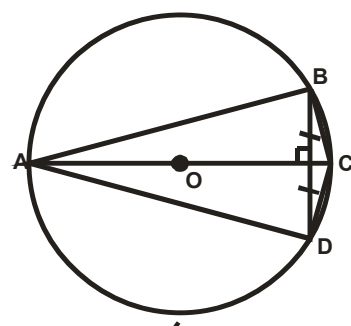
$$M_1M_2=EM_2-EM_1=\frac{17}{2}-\frac{13}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ (დმ).}$$

49.



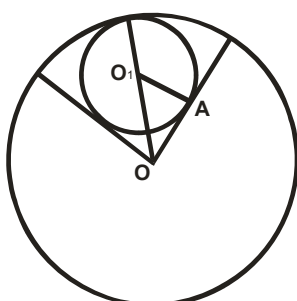
$\angle A=\angle C=30^\circ$, ამიტომ შემოხაზულ
წრეწირში AB ქორდა რადიუსის
ტოლია. ე.ი. $d=4\text{სმ}$.

55.



რადგან AC BD-ს შუამართობია, ის
გადის წრეწირის O ცენტრზე.
ამიტომაც $\angle ABC = \angle ADC=90^\circ$, ხოლო
 $\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

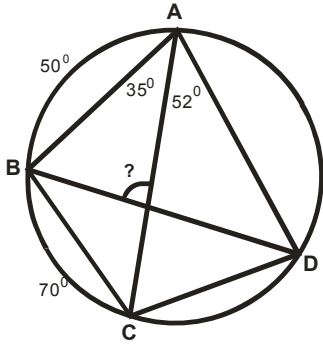
56.



$$\triangle OAO_1\text{-ში } OO_1=R-r \quad O_1A=r$$

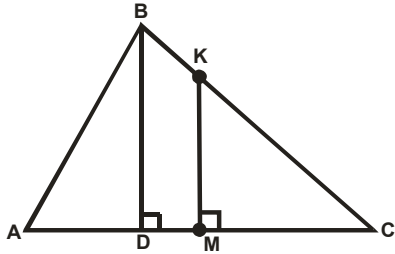
$$\angle O_1OA=30^\circ \Rightarrow r=\frac{R}{3}.$$

57.

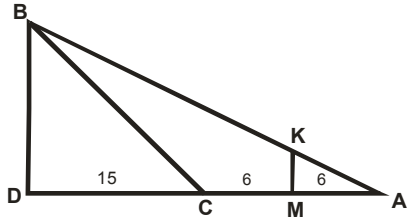


რადგან $\angle B + \angle D = 180^\circ$,
 ოთხკუთხედზე შემოიხაზება
 წრეწირი და $\widehat{BC} = 70^\circ$ $\widehat{CD} = 104^\circ$
 $\widehat{AB} = 50^\circ \Rightarrow$ საძებნი კუთხე
 უდრის $\frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = 77^\circ$.

66.

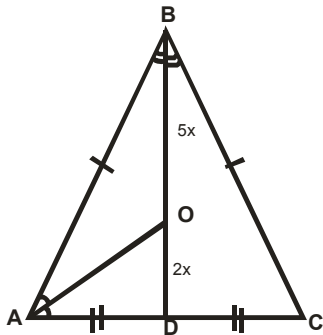


ა) $AD=15$ $DC=27$
 $AM=MC=21 \Rightarrow DM=6$
 $\frac{BK}{KC} = \frac{DM}{MC} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.



ბ) $AD=27$ $DC=15 \Rightarrow$
 $AC=42$ $AM=CM=21$
 $\frac{BK}{KC} = \frac{DM}{MC} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

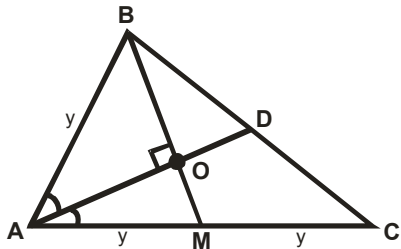
69.



$AD=DC$ და $AB=BC$, ამასთან
 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow AD = 2K$ და $AB=5K$
 ხოლო $2(2k+5k) = 56 \Rightarrow$
 $AC= 16$ (სმ); $AB=BC=20$ (სმ).

პასუხი: 16სმ; 20სმ; 20სმ.

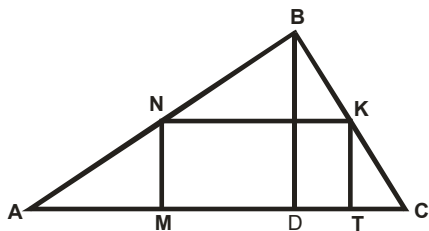
73.



რადგან AO ბისექტრისა სიმაღლეცაა,
 $\triangle ABM$ ტოლფერდაა და $AB=AM=MC=y$
 ბისექტრისის თვისების თანახმად,
 $DC=2BD$, ხოლო $BD+DC=15$ სმ $\Rightarrow$
 $3BD=15$ სმ $\Rightarrow BD=5$ სმ $\Rightarrow DC=10$ სმ

პასუხი: $BD= 5$ სმ; $DC=10$ სმ

80.



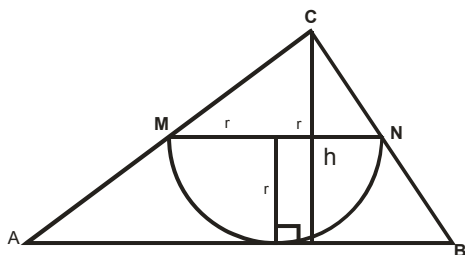
$MT=9x$; $MN=5x$ B-დან AC-ზე
დავუშვათ სიმაღლე $BD=16$ სმ.

$$\triangle NBK \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{9x}{48} = \frac{16-5x}{16}$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow MN=10 \text{ (სმ)} \quad NK=18 \text{ სმ.}$$

პასუხი: 10სმ; 18სმ.

82.

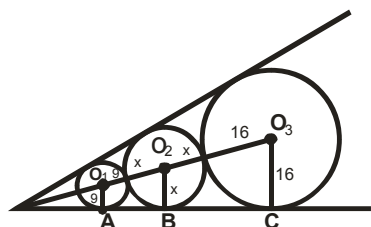


$$\triangle MNC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{2r}{a} = \frac{h-r}{h};$$

$$2hr=ah-ar \quad (2h+a)r=ah \quad r=$$

$$\frac{ah}{2h+a}$$

84.

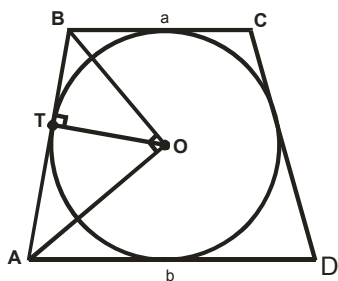


O_1 ; O_2 ; O_3 ერთ წრეზე მდებარეობს
 AO_1O_3C ტრაპეციაა. O_2B ფუძეების
პარალელურია და გვაქვს ტოლობა:

$$x = \frac{(9+x) \cdot 16 + (16+x) \cdot 9}{(9+x) + (16+x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=12 \text{ (სმ)}. \quad \text{პასუხი: 12სმ}$$

88.

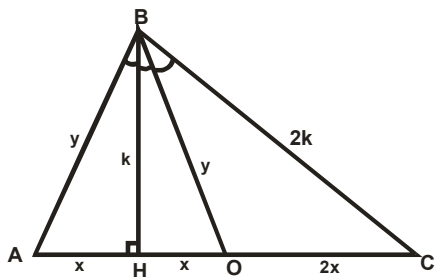


$$\triangle AOB \text{ მართკუთხაა, } BT=\frac{a}{2}; AT=\frac{b}{2}$$

$$OT^2 = BT \cdot AT \Rightarrow r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \Rightarrow 2r^2 = ab$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{ab}$$

89.



BO არის $\angle HBC$ -ს ბისექტრისა, ამიტომ

$BH=k$ და $BC=2k$ გვაქვს

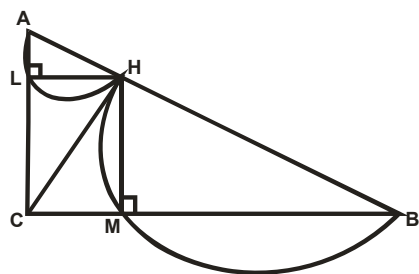
დამოკიდებულებები:

$$\begin{cases} y^2 = k^2 + x^2 \\ 4k^2 = k^2 + 9x^2 \end{cases} \Rightarrow y=2x \Rightarrow \angle ABC=90^\circ,$$

ხოლო $\angle A=60^\circ$ და $\angle C=30^\circ$.

პასუხი: 30° ; 60° ; 90° .

90.



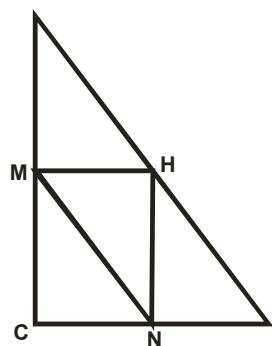
$$AC:BC=3:4 \Rightarrow AH:HB=9:16$$

$\triangle ALH$ მართკუთხაა და მსგავსია

$$\triangle ACB\text{-ის} \Rightarrow \frac{AL}{75} = \frac{9}{25}; AL=27.$$

ანალოგიურად $BM=64$.

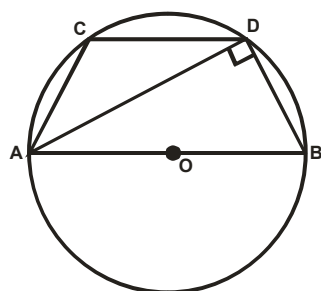
92.



$MN=CH$ CH კი უმცირესია, როცა ის
ჰიპოტენუზაზე დაშვებული

$$\text{სიმაღლე. ე. ი. } CH = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}.$$

97.



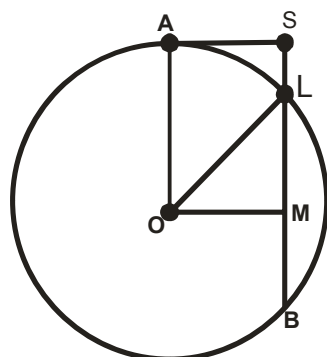
$$AC=BD=13 \quad AD=84 \quad \angle ADB \text{ მართია}$$

და გვაქვს ტოლობა: $AB^2=84^2+13^2$

$$\Rightarrow AB=85 \Rightarrow R = \frac{85}{2} \text{ (სმ).}$$

$$\text{პასუხი: } R = \frac{85}{2}$$

101.



$$OM(\text{პერპენდიკულარული})SB \Rightarrow$$

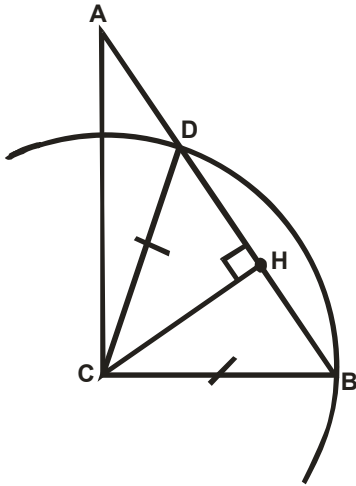
$$LM=MB=5\text{მ} \quad OM=12\text{მ.}$$

$$\triangle OML\text{-დან } OL^2=OM^2+ML^2 \Rightarrow$$

$$OL=13 \text{ (მ).}$$

$$\text{პასუხი: } 13\text{მ}$$

103.

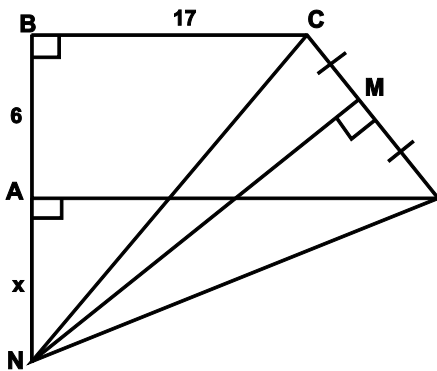


$CB=CD$. AB -ზე დაშვებული CH სიმაღლე
 BD -ს შუაზე ყოფს. $\Rightarrow HB=49$; $AH=576$
 $BC^2=BH \cdot AB \Rightarrow BC=\sqrt{49 \cdot 325} = 175$

$$AC^2=AH \cdot AB \Rightarrow AC=\sqrt{576 \cdot 625} = 600.$$

პასუხი: 175სმ; 600სმ.

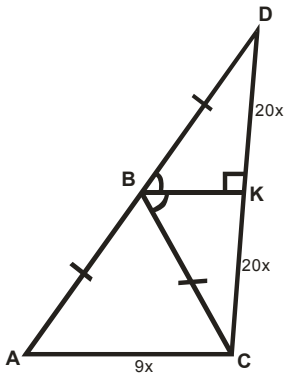
107.



AB ფერდი სიმაღლეცაა და უდრის
 $\sqrt{10^2 - (25 - 17)^2} = 6$ $NC=ND$ და თუ
 $AN=x$, მაშინ $NC^2=(6+x)^2+17^2$, ხოლო
 $ND^2=x^2+25^2$, მათი გატოლებით კი
 ვიგებთ, რომ $x=25 \Rightarrow ND=25\sqrt{2} \Rightarrow$
 $NM=\sqrt{ND^2 - MD^2} = 35$ (დმ).

პასუხი: 35 დმ

108.



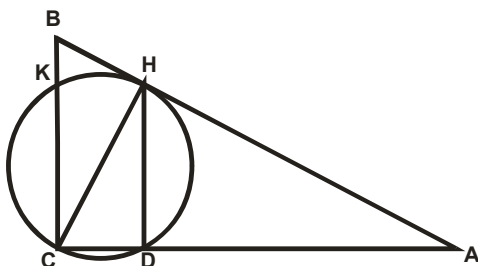
თუ სამკუთხედებს განვათავსებთ ისე,
 როგორც ნახაზზეა, BK ბისექტრისა
 სიმაღლეცაა და მედიანაც და ამავდროულად
 პარალელურია AC -სი $\Rightarrow BK \parallel AC$ -ს

შუახაზია და უდრის $\frac{9x}{2}$ $\triangle BKC$ -დან $41^2=$

$$\left(\frac{9x}{2}\right)^2 + (20x)^2 \Rightarrow x=2 \text{ ე. ი. } AC=18; CD=80.$$

პასუხი: 18დმ; 80დმ

110.



$CKHD$ მართკუთხედია. $CD=12$,

$$CK=18 \Rightarrow KH=12 \text{ და } HD=18$$

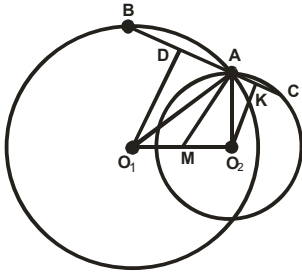
მართკუთხა $\triangle BHC$ - დან $KH^2 = BK \cdot KC$

$$\Rightarrow BK=8 \text{ ანალოგიურად}$$

$\triangle AHC$ -დან $AD=27$ საიდანაც

$$AC=39 \text{ (სმ); } BC=26 \text{ (სმ)}$$

114.



O_1 -დან AB -ზე და O_2 -დან AC -ზე დაშვებული
 მართობები თითოეულ მათგანს შაზე ყოფს და
 რადგანაც $AB=AC$, მათი ნახევრებიც ტოლია
 $O_1D=x$, $O_2K=y$. AM არის O_1DCO_2 ტრაპეციის
 შუახაზიც და $\triangle O_1AO_2$ -ის მედიანაც.

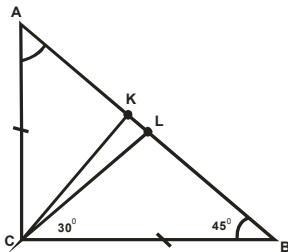
გვექნება ტოლობები,

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{15} \\ 6-x^2=4-y^2 \end{cases} \text{ პ.ო. } x=\frac{17}{2\sqrt{15}}. \quad \text{პასუხი: } \frac{17}{2\sqrt{15}}.$$

116. მითითება: დიდი და საშუალო წრეწირის გარე მხეები ტოლია დიდი და პატარა წრეწირების გარე მხეებისა და საშუალო და პატარა წრეწირის გარე მხეებთა ჯამის.

პასუხი: R=36

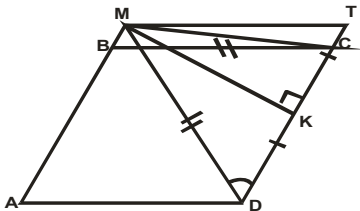
136.



AK=LB თითოეულ მათგანს
დავთვლით სინუსების თეორემით
 ΔCLB -დან და მივიღებთ, რომ

$$AK=LB=\frac{\sqrt{3}-1}{2}c, \quad KL=(2-\sqrt{3})c.$$

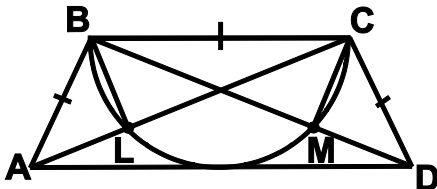
139.



Δ DMC ტოლფერდაა, ამიტომ MK
 სიმაღლეცაა და მედიანაც $\Rightarrow MK=24$
 M-ზე გავავლოთ BC-ს პარალელური
 MT. ΔMKT -დან $KT=18 \Rightarrow BM=CT=3$.

პასუხი: 3სმ

144.



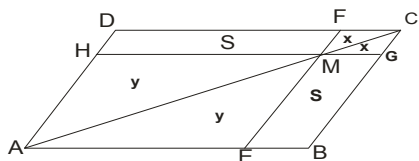
რადგან L და M დიაგონალთა
შუაწერტილებია, ხოლო BLC და
BMC დიამეტრზე დაყრდნობილი
კუთხეები ანუ მართი =>
 $AB=BC=DC=2R$

ეს კი ნიშნავს, რომ ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაში AC ბისექტრისაა, ხოლო $\angle BAD = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 15^\circ$

პასუხი: 15⁰

§5. მრავალკუთხედის ფართობი

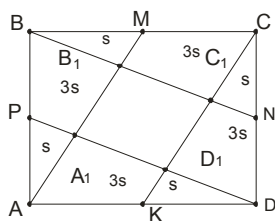
7.



$$\begin{cases} S_{ADC} = S_{ABC} \\ S_{MFC} = S_{MGC} \\ S_{AHM} = S_{AEM} \end{cases} \Rightarrow$$

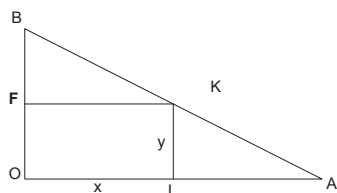
$$S_{HDFM} = S_{EMGB} = S.$$

8.



$$\begin{aligned} \Delta ABM &= \Delta BCN = \Delta CDK = \Delta DAP \quad \text{საევე} \\ \Delta AA_1P &\sim \Delta AB_1B \quad \Delta CC_1N \sim \Delta CD_1D \\ \Delta BB_1M &\sim \Delta BC_1C \quad \Delta DD_1K \sim \Delta DA_1A \end{aligned}$$

9.



$$BF=2\text{სმ} \quad AL=3\text{სმ} \quad CL=x \quad LK=y$$

$$\Delta BFK \sim \Delta KLA \Rightarrow \left(\frac{BF}{FK} = \frac{KL}{LA} \right) \Rightarrow$$

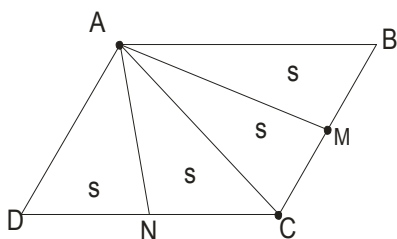
$$\frac{2}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow xy = 6(\text{სმ})^2$$

$$\text{პასუხი: } 6(\text{სმ})^2$$

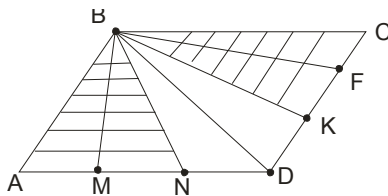
ნახ.2

ე.ი. კვადრატის ნაწილების ფართობები ისე განაწილდება, როგორც ეს მოცემულია (ნახ.2)-ზე. კვადრატის ფართობი გამოდის $4 \cdot 5S = 20S$ -ის ტოლი, ხოლო $S_{A_1B_1C_1D_1} = 20S - 16S = 4S = 1$. პასუხი: 1

11.



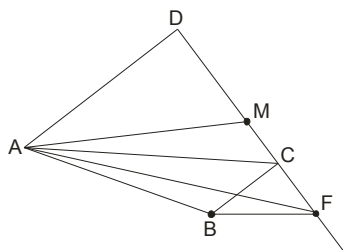
ა) AC დიაგონალი, AC და AN მონაკვეთები, სადაც M და N შესაბამისად BC და DC გვერდების შუაწერტილებია, ფართობს ყოფს 4 ტოლ ნაწილად.



ბ) თუ AD-ზე ავიღებთ M და N წერტილებს ისე, რომ $AM=MN=ND$, ხოლო DC-ზე K და F წერტილები ისე, რომ $DK=KF=FC$, მაშინ BM ; BN ; BD .

BK და BF ტრაპეციას გაყოფს 6 ტოლდიდ სამკუთედად. მათი დაწყვილებით კი მიიღება სამი ტოლდანი ფიგურა: ABN ; $NBKD$; KBC .

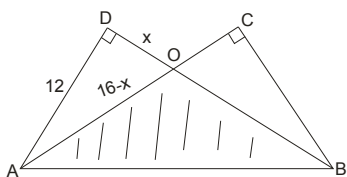
16.



ABCD ოთხკუთედი გავყოთ ორ ტოლდიდ ფიგურად. გავავლოთ AC დიაგონალი, B წერტილზე გავავლოთ AC-ს პარალელური DC-ს გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე F წერტილში. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AFC} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle AFD}$

DAF სამკუთხედის AM მედიანა DAF სამკუთხედის და ასევე ABCD ოთხკუთხედის ფართობს შუაზე ყოფს. გასათვალისწინებელია, რომ $S_{ABC} < S_{ADC}$; რაც არის გარანტია იმისა, რომ ADF-ის მედიანა გაივლის ADC სამკუთხედში.

18.

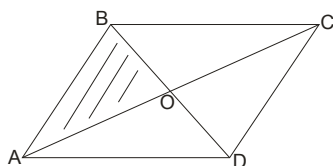


თუ O AC და BD-ს გადაკვეთის წერტილია და DO-ს ავლნიშნავთ x-ით $\Rightarrow AO=16-x$.

მართკუთხა $\triangle ADO$ -ში $x^2 + 12^2 = (16-x)^2 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

$S_{AOB} = S_{ADB} - S_{ADO} = 75 \text{ სმ}^2$.

23.



$AB=15$ $AD=40$ $AC=74$ $S_{ABCD}=4 \cdot S_{ABO}$

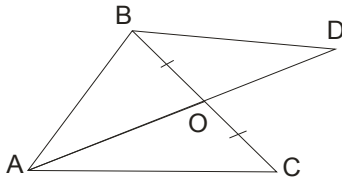
$\triangle ABO$ -ს ფართობს დავითვლით

ჰერონის ფორმულით:

$S_{AOB} = 102\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 408\sqrt{3} \text{ (სმ)}^2$

პასუხი: $408\sqrt{3} \text{ სმ}$.

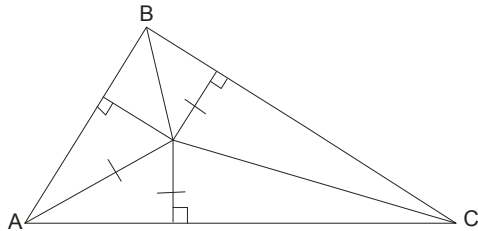
24.



AB=27სმ; AC=29სმ; AO=26სმ. თუ მოცემულ მედიანას გავაგრძელებთ მისი ტოლი OD მონაკვეთით. $S_{ABC}=S_{ABD}$ $\triangle ABD$ -ს ფართობს კი გამოვთვლით ჰერონის ფორმულით.

25. მოცემული გვერდებითა და ფართობით ვიპოვით მოცემულ გვერდთა შორის კუთხის სინუსს. $\sin \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{8}{17}$, შესაბამისად, მესამე გვერდის სიგრძე უდრის 25სმ ან 39სმ.

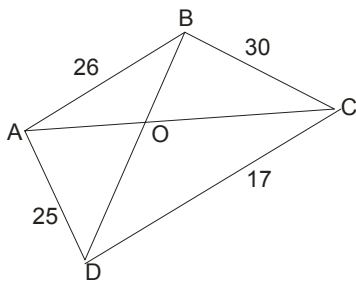
27.



$S_{AOB}=28\theta^2$ $S_{BOC}=60\theta^2$ $S_{AOC}=80\theta^2 \Rightarrow$
 $AB:BC:AC=7:15:20 \Rightarrow AB=7x; BC=15x; AC=20x$
 $\Rightarrow S=42x^2=28+60+80 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$
 $AB=14(\theta); BC=30(\theta); AC=40(\theta).$

პასუხი: 14მ; 30მ; 40მ

28.



AB=26, BC=30, CD=17, AD=25, AC=28
 ჰერონის ფორმულით მივიღებთ, რომ
 $S_{\triangle ABC}=336 \text{ სმ}^2$ $S_{\triangle ADC} = 210 \text{ სმ}^2 \Rightarrow S_{ABCD} = 546 \text{ სმ}^2.$

$$\triangle ABC\text{-დან } \cos \angle BAC = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{12}{13} \Rightarrow$$

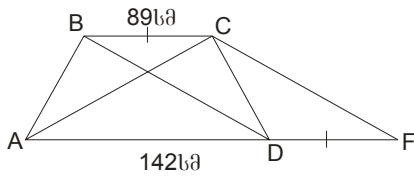
$$\triangle CAD\text{-დან } \cos \angle DAC = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \angle DAC = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\cos \angle BAD = -\frac{16}{65}.$$

$$\triangle BAD\text{-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად } BD^2 = 26^2 + 25^2 - 2 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \left(-\frac{16}{65}\right) = 1621$$

$$BD = \sqrt{1621} \approx 40,3 \text{ (სმ)}, \frac{BO}{DO} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{8}{5} \Rightarrow BO \approx 24,9; DO \approx 15,4$$

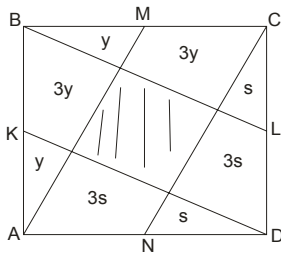
33.



BC=89 სმ AD=142 სმ AC=120სმ BD=153სმ
 თუ $CF \perp BD$ მაშინ ABCD ტრაპეცია
 ტოლდიდია $\triangle ACF$, რომლის ფართობსაც
 დავითვლით ჰერონის ფორმულით
 $S_{ACF}=8316\text{სმ}^2$.

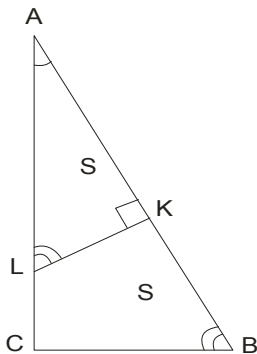
პასუხი: 8316სმ^2

38. ამოცანა 8-ის მსგავსად, გვექნება ფართობთა შემდეგი განაწილება:



მაგრამ, რადგან $\triangle ABM$ ტოლდიდია $\triangle CBL \Rightarrow S=y$
 სამეზბნი ფართობი კი მთლიანის მეხუთედი
 ნაწილი გამოდის.

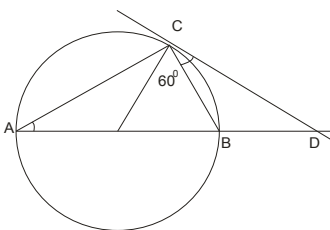
40.



$AC=20\theta$
 $\triangle AKL \sim \triangle ACB$
 $AK=10\sqrt{2} (\theta)$.

პასუხი: $10\sqrt{2} (\theta)$

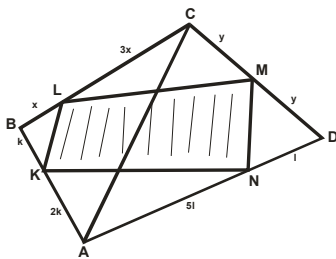
41.



$\triangle DCM \sim \triangle DAC \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle DCB}}{S_{\triangle DAC}} = \frac{BC^2}{AC^2} = \text{ctg}^2 60^\circ = \frac{1}{3}.$$

64.



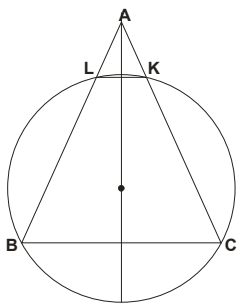
გავვლოთ AC დიაგონალი $S_{\Delta NMD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta ADC} \Rightarrow$

$$\begin{cases} S_{\Delta MND} = a \\ S_{\Delta ADC} = 12a \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta NMC} = 11a, \text{ ანალოგიურად}$$

$$\begin{cases} S_{\Delta BKL} = b \\ S_{\Delta ABC} = 12b \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta KLC} = 11b$$

$$(12a) + (12b) = 1 \Rightarrow 11a + 11b = \frac{11}{12} (\text{სმ})^2.$$

66.



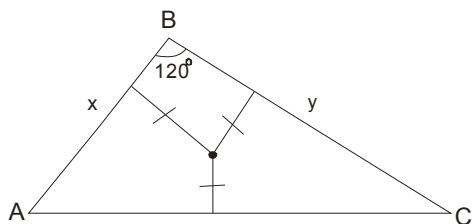
$$AL \cdot AB = 28 = 16 \Rightarrow AL = x \text{ და } AB = \frac{16}{x}$$

$$AK \cdot AC = 16 \Rightarrow AK = y \text{ და } AC = \frac{16}{y}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{y} \cdot \sin 30^\circ = 10 \Rightarrow xy = 6,4$$

$$S_{\Delta ALK} = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} xy = \frac{8}{5}.$$

67.



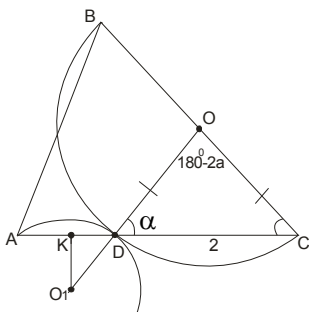
თუ $AB = x$ და $BC = y$, გვექნება ტოლობები:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 169 \\ \frac{x + y + 13}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} xy \sin 120^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 169 \\ 2(x + y) + 26 = xy \end{cases} \quad x + y = a, \quad xy = b \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b = 169 \\ 2a - b = -26 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2a = 195 \Rightarrow$$

$$(a-1)^2 = 196 \Rightarrow a = 15 \quad \text{გ.ო. } P = 15 + 13 = 28, \quad \text{ხოლო } S = \frac{p}{2} \cdot r = 14\sqrt{3}.$$

68.



2სმ რადიუსიანი წრეწირის ცენტრი AD -ს
შუამართობისა და OD-ს გაგრძელების გადაკვეთის
წერტილია. ამიტომ $\cos \angle KDO_1 = \cos \angle ODC = \frac{1}{4} \Rightarrow$

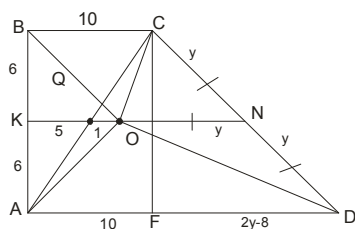
$$\begin{aligned} \sin \angle ODC &= \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \angle ODC = 95^\circ \quad \frac{DC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{OC}{\sin \alpha} \Rightarrow \\ \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{OC}{\sin \alpha} \Rightarrow OC = 4 \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

II **ဟိုက်ဒရိုဂျစ်**. $\Delta\text{AO}_1\text{D} \sim \Delta\text{DOC} \Rightarrow \left(\frac{\text{O}_1\text{D}}{\text{AD}}\right) = \left(\frac{\text{OC}}{\text{DC}}\right) \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\text{OC}}{2} \Rightarrow \text{OC}=4$

$$\Delta BDC \Rightarrow BD^2 = BC^2 - DC^2 = 60 \Rightarrow BD = 2\sqrt{15} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 3\sqrt{15}.$$

პასუხი: $3\sqrt{15}$ სმ².

71.



Q AC-ს შუაწერტილია, ხოლო O AB-ს
შუამართობზეა, თანაც $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$
 $KB = 5 \Rightarrow KO = BK = AK = 6 \Rightarrow AC = 2\sqrt{61}$ (სმ)
 $CN = DN = ON = y \Rightarrow KN$ შუახაზი $= 6 + y \Rightarrow$
 $AD = 2y + 2$ ხოლო CD-ს FD გეგმილი AD
ფუძეზე ტოლია $(2y - 8)$ -ის.

ΔCFD-ში პითაგორას თეორემის თანახმად $(2y)^2=12^2+(2y-8)^2 \Rightarrow y=\frac{13}{2}$

$$S_{ABCD} = (6+y) \cdot 12 = 150(60)^2.$$

პასუხი: 150 სმ²

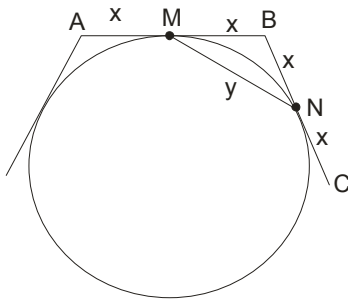
§6. წესიერი მრავალკუთხედები

7. ჩახაზული კვადრატის გვერდია $a_4=8$, $a_4=\sqrt{2} R$, $a_3=6$, $R=2\sqrt{3}$. ე.ი. $a_4=2\sqrt{6}$.

10. $a_6=R$, ე.ი. $48=6R$; $R=8$, $a_4=\sqrt{2} \cdot R=8\sqrt{2}$. $P_4=32\sqrt{2}$.

13. წესიერი სამკუთხედის ფართობი აღვნიშნოთ S_1 , ოთხკუთხედის- S_2 , ხოლო ექვსკუთხედის S_3 . $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = a^2$; $S_3 = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{4}$. $S_1 : S_2 : S_3 = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$.

14.

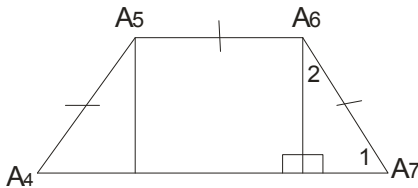


MN არის ჩახაზული ექვსკუთხედის გვერდი. $MN=R$.

AB კი შემოხაზული ექვსკუთხედის გვერდი. $AB = \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2x$.

$S_1 : S_2 = AB^2 : MN^2 = 4 : 3$.

15.



წესიერი რვაკუთხედის

კუთხეა 135° . განვიხილოთ A_4

$A_5 A_6 A_7$ ტოლფერდა

ტრაპეცია. $\angle A_5 A_6 A_7 = 135^\circ$,

საიდანაც $\angle 2 = 45^\circ$. ე.ი. $\angle 1 = 45^\circ$.

მივიღეთ $\angle A_3 A_4 A_7 = 90^\circ$.

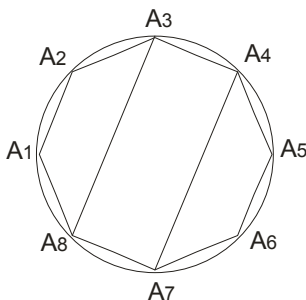
ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$A_3 A_4 A_7 A_8$ ოთხკუთხედის

დანარჩენი კუთხეებიც

მართია. ე.ი. ეს ოთხკუთხედი

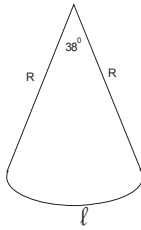
მართკუთხედი. რ.დ.გ.



21. საბურავს აქვს წრეწირის ფორმა. ამ წრეწირის სიგრძეა $\ell=2\pi R=989:500$, საიდანაც

$$2R = \frac{989}{500\pi} \approx 0.633 = 63\text{სმ}.$$

26.



ქანქარის სიგრძე აღვნიშნოთ R -ით:

$$l = \frac{38}{360} \cdot 2\pi R = 24, \text{ საიდანაც } R = \frac{2160}{19\pi} \approx 36,2$$

31.

ყველაზე დიდი წრის ფართობი იყოს S_1 , შემდეგის - S_2 , შემდეგის - S_3 , ხოლო ყველაზე მცირესი - S_4 . $S_1=16\pi$; $S_2=9\pi$; $S_3=4\pi$ და $S_4=\pi$. რგოლების ფართობებია: $S_1 - S_2 = 7\pi$; $S_2 - S_3 = 5\pi$ და $S_3 - S_4 = 3\pi$;

32.

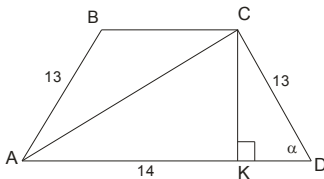
კათეტებზე აგებული წრეების რადიუსებია $\frac{a}{2}$ და $\frac{b}{2}$, ხოლო ჰიპოტენუზაზე

კი $\frac{c}{2}$. (a , b და c შესაბამისად მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები და

ჰიპოტენუზაა). S_1 -ით აღვნიშნოთ კათეტებზე აგებული ნახევარწრეების ფართობთა ჯამი, ჰიპოტენუზაზე აგებული წრის ფართობი კი - S_2 .

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} \right), S_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi c^2}{4}. \text{ ცხადია, } S_1 = S_2. \text{ რ.დ.გ.}$$

40.



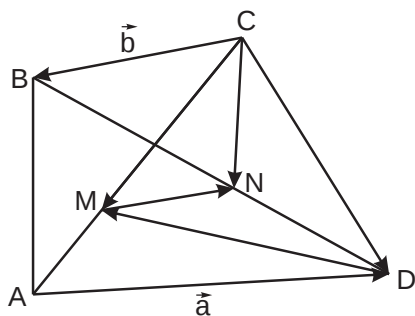
რადგან ტრაპეციაზე წრეწირი შემოიხაზება, ე.ი. ტრაპეცია ტოლფერდაა. შემოხაზული წრეწირის სიგრძეა $l=2\pi R$. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ამ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. ცხადია, ეს წრეწირი შემოხაზულია $\triangle ADC$ სამკუთხედზე. რადგან $KD=5$ ე.ი. $CK=4$. $\triangle CKD$ -დან მივიღებთ, რომ $\cos \alpha = \frac{5}{13}$,

$$\triangle ACD\text{-დან კი ვწერთ: } \frac{AC}{\sin \alpha} = 2R. \text{ ე.ი. } R = \frac{15 \cdot 13}{4},$$

$$l = 2\pi \cdot \frac{15 \cdot 13}{4} \approx 97,5\pi.$$

§7. ვექტორები

6.



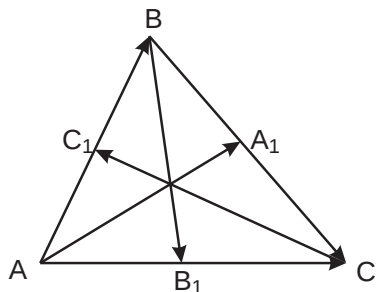
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{-a} - \overrightarrow{CD}) \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{CD}) \quad (3). \quad (2) \text{ და } (3) \text{ ჩავსვით } (1)\text{-ში.}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \quad \text{რ.დ.გ.}$$

7.



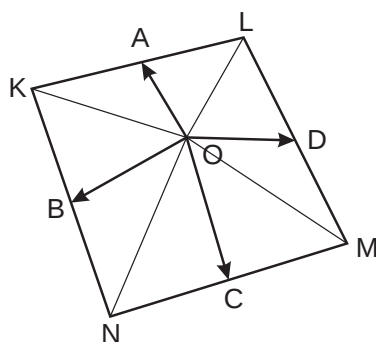
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}); \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}); \quad \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

ე.ი.

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

9.

ვთქვათ, K, L, M და N ოთხკუთხედის წვერობია.



$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}); \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM});$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON}); \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM})$$

, საიდანაც

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM});$$

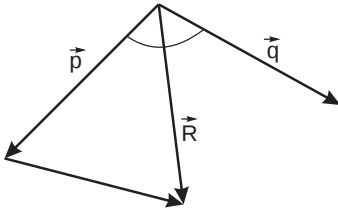
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}).$$

$$\text{მივიღეთ, } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

13. ა) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = 0$, საიდანაც $x\vec{a} = (y-3)\vec{b}$ და რადგან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარულია, ტოლობას მაშინ ექნება ადგილი, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ -ს კოორდინატები ერთდროულად ნულის ტოლია. ე.ი. $x=0$, $y=3$.

15. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარულია, $\vec{p}$ და $\vec{q}$ კი კოლინეარული, მაშინ $\vec{p} = k\vec{q} \Rightarrow$
 $2\vec{a} - \vec{b} = k(\vec{a} + k\vec{b}) \Rightarrow k=2$ და $x = -\frac{1}{2}$.

19.



ტოლქმედი ძალის $\vec{R}$ ვექტორი,

როგორც ვიცით, უდრის $\vec{p} + \vec{q}$,

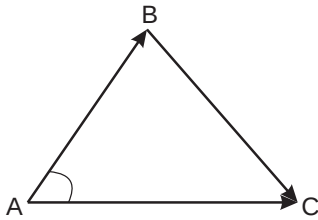
ამიტომ

$$\vec{R}^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2 = \vec{p}^2 + \vec{q}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} =$$

$$= 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 13^2. \quad |\vec{R}| = 13.$$

23.

მოც: A(2; 8); B(-1; 5); C(3;1). გამოვთვალოთ A კუთხის კოსინუსი.

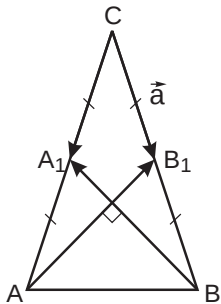


$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}. \text{ ანალოგიურად მივიღებთ, რომ}$$

$$\cos B = 0, \cos C = \frac{4}{5}.$$

24. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$. $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

28



$$\overline{CA_1} \equiv \vec{a}; \overline{CB_1} \equiv \vec{b}; |\vec{a}| \equiv a; |\vec{b}| \equiv b. \text{ ცხადია, } a=b.$$

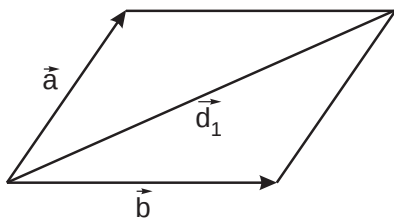
$$\overline{AA_1} = \vec{a} - 2\vec{b}; \overline{BB_1} = \vec{b} - 2\vec{a}, \text{ საიდანაც}$$

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 =$$

$$= 5a^2 \cos C - 4a^2 = 0. \Rightarrow \cos C = \frac{4}{5}$$

$$\angle C \approx 36^\circ 52'.$$

29.



$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}; \Rightarrow |\vec{d}_1| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \approx 24,4 \text{ და } |\vec{d}_2| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = 15$$

31. $\overrightarrow{AD} = (\overline{2;4})$ და $\overrightarrow{BC} = (\overline{1;2})$. ვექტორთა კოორდინატების პროპორციულობიდან გამომდინარეობს, რომ $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ კოლინეარულია. თუ გამოვთვლით მათ სიგრძეებს, მივიღებთ რომ $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{20}$ და $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$.
რადგან AD პარალელურია BC-სი და AD არ უდრის BC-ს, ე.ი. ABCD ტრაპეციაა.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha, \text{ სადაც } \alpha \text{ არის კუთხე დიაგონალებს შორის და რადგან } \overrightarrow{AC} (3;-2);$$

$$\overrightarrow{BD} (0;8), AC = \sqrt{13}, BD = 8, \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow S = 12.$$