ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა 10

მოსწავლის წიგნი

გრიფი მიენიჭა ს.ს.ი.პ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ
(ბრძანება N 375, 18.05.2012).

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

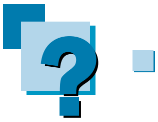
ს ა რ ჩ ე ვ ი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა.ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:



- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

- წყვილებში სამუშაო;

* - შედარებით რთული ამოცანა;

- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;

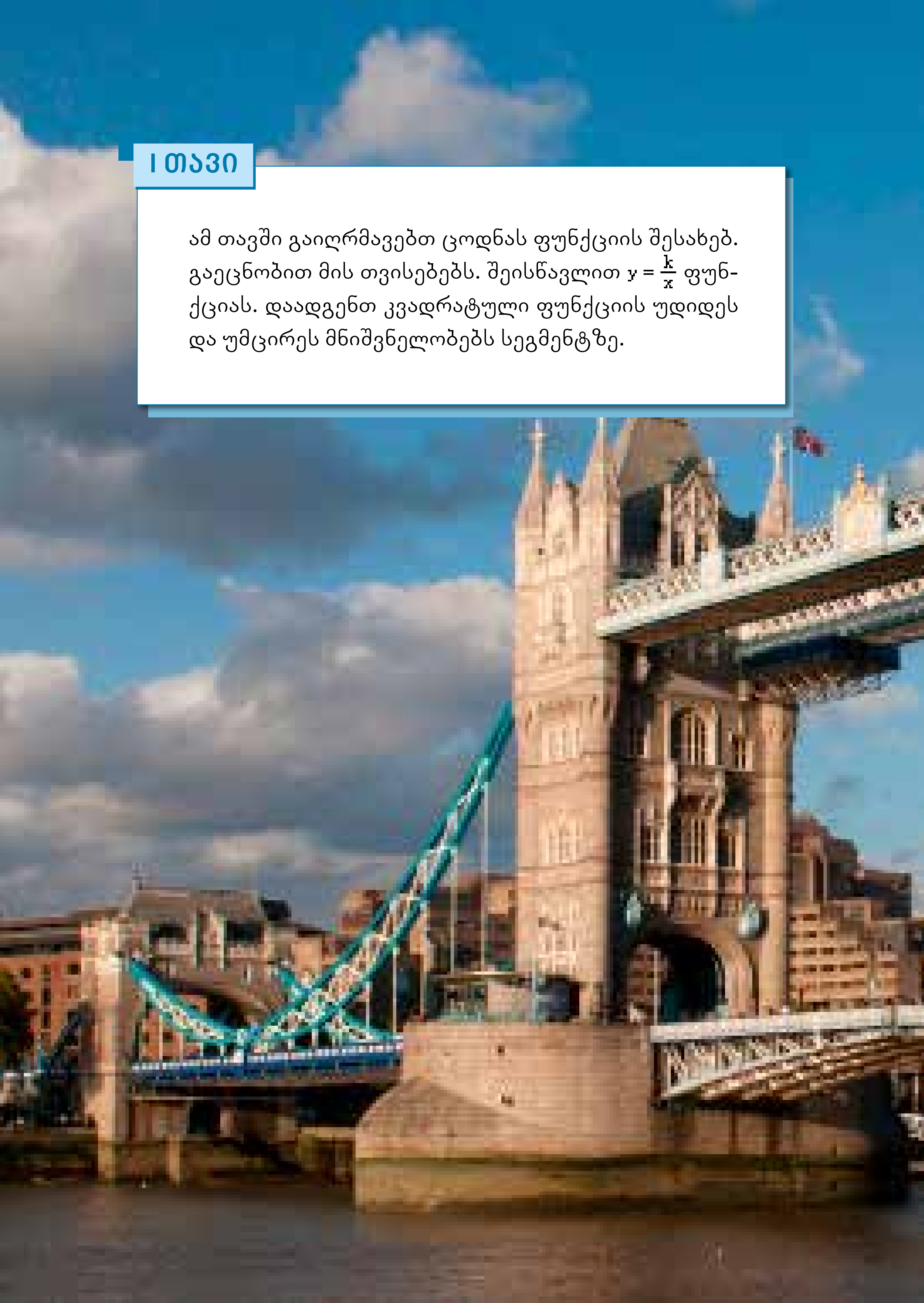
- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს და ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს.

გისურვებთ წარმატებებს!

I თავი

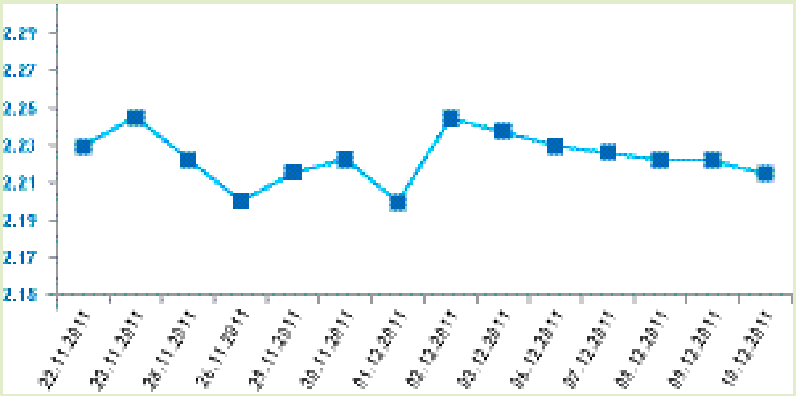
ამ თავში გაიღრმავებთ ცოდნას ფუნქციის შესახებ. გაეცნობით მის თვისებებს. შეისწავლით $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციას. დაადგენთ კვადრატული ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს სეგმენტზე.



I
თავი

1 ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები

1. შესავალი



ლარის კურსი ევროს მიმართ
22.11.2011-10.12.2011

1 არის თუ არა ნახაზზე მოცემული დამოკიდებულება ფუნქცია?

ა) იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე;

ბ) დროის რა პერიოდში იკლებდა, იზრდებოდა ევროს კურსი ლართან მიმართებაში?

გ) როდის მიაღწია ევროს კურსმა უდიდეს მნიშვნელობას?

ბუნებრივი მოვლენები ძალიან მჭიდროდაა ერთმანეთთან დაკავშირებული. უმეტეს შემთხვევაში ის კანონები, რომლებიც მართავენ მოვლენათა ურთიერთდამოკიდებულებას საკმაოდ რთულია.
უამრავ ასეთ დამოკიდებულებათა შორის მეცნიერებმა გამოყვეს ისეთები, როცა ერთი სიდიდის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორე სიდიდის მნიშვნელობას. ასეთი დამოკიდებულებების მაგალითები მრავლად გვხვდება როგორც მათემატიკაში, ასევე ფიზიკაშიც (მაგალითად, თუ ვიცით კუბის წიბოს სიგრძე, შეგვიძლია გამოვთვალოთ კუბის მოცულობა, ზედაპირის ფართობი; მოძრაობის სიჩქარისა და მოძრაობაზე დახარჯული დროის საშუალებით შესაძლებელია გავლილი მანძილის გამოთვლა და ა.შ.).

გავიხსენოთ: X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი **ფუნქცია** ეწოდება.
ფუნქცია აღინიშნება ასე:

$$f\colon x \to y, \quad \text{ან} \quad y=f(x),$$

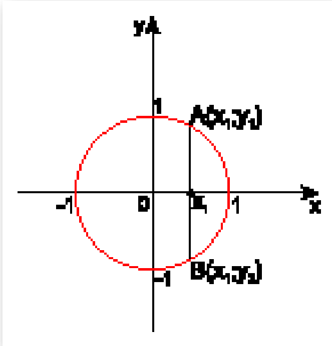
სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, არგუმენტი; y – დამოკიდებული ცვლადი, ფუნქცია; f კი – წესი, რომლითაც x ელემენტს შეესაბამება y ელემენტი.

X და Y რიცხვით სიმრავლეებს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება რიცხვითი ფუნქციაა.

როგორც ვიცით, რიცხვითი ფუნქციის თვალსაჩინოთ წარმოსადგენად მის გრაფიკს იყენებენ. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის საკოორდინატო სიბრტყის $(x; f(x))$ წერტილთა სიმრავლე.

დახაზეთ ა) $y=2x+3$; ბ) $y=-x+1$; გ) $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის საშუალებით იპოვეთ $y(0)$; $y(-2)$; $y(3)$.

ცხადია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული ყოველი წირი არ არის რაიმე ფუნქციის გრაფიკი. მაგალითად, ნახაზზე მოცემულია წრეწირი ცენტრით (0;0) წერტილში. იგი არ არის რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, რადგან $\forall x \in (-1;1)$-ს შეესაბამება ორდინატის ორი y_1 და y_2 მნიშვნელობა, რაც იგივეა, რომ წრეწირზე არის ორი სხვადასხვა წერტილი ერთი და იმავე აბსცისით და განსხვავებული ორდინატით.



სიმბოლო ∀-ით მათემატიკაში აღინიშნება სიტყვა „ნებისმიერი“, „ყოველი“

მაშასადამე,

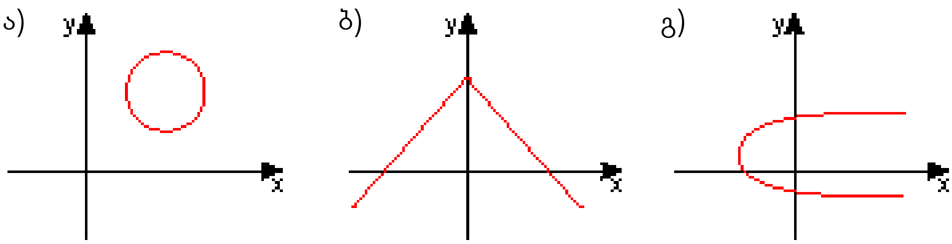
f წირი იქნება რაიმე ფუნქციის გრაფიკი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა y ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე f წირს გადაკვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში.

გასახსენებლად!

$y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის x-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს.

ნახაზზე მოცემული წირებიდან რომელია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი? (პასუხი დაასაბუთეთ)

ა) ბ) გ)



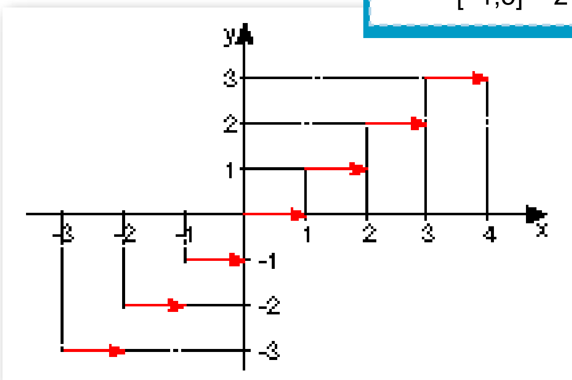
$[1]=1$
$[0,7]=0$
$[-1,5]=-2$

ნებისმიერ x რიცხვს შეუსაბამეთ [x], მისივე მთელი ნაწილი (x რიცხვის მთელი ნაწილი ის უდიდესი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება x-ს). ე.ი. გვაქვს $f:x\to[x]$ დამოკიდებულება.

ა) არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?

ბ) იპოვეთ $f(-2,2)$; $f(0,5)$; $f(1,3)$; $f(-0,1)$.

გ) დაწერეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე.



როგორც პარაგრაფის დასაწყისში ვნახეთ ფუნქციის გრაფიკი საკმაოდ მოსახერხებელია იმისათვის, რომ შეგვექმნას ზოგადი წარმოდგენა ფუნქციის ყოფაქცევაზე, მის თვისებებზე.

მომდევნო პარაგრაფებში ჩვენ გავეცნობით სხვადასხვა ფუნქციათა გრაფიკებს, მათ თვისებებს.

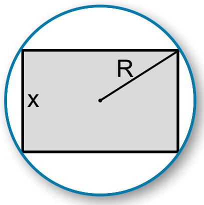
სავარჯიშოები:

1 იქნება თუ არა ფუნქცია მოცემული შესაბამისობა?
ა) სიბრტყის M წერტილი → (x;y), სადაც წყვილი (x;y) არის M წერტილის კოორდინატები;
ბ) M (x;y) → x;
გ) x → M (x;y);
დ) მანქანა → ის რიცხვი, რომელ რიცხვშიც ეს მანქანაა გამოშვებული;
ე) დღე (რიცხვი) → ამ დღეს გამოშვებული მანქანა.

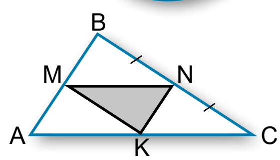
2 დაწერეთ ფუნქცია f: წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი → ამავე ექვსკუთხედის ფართობი და იპოვეთ f(2); f(5).

3 საწარმოს ერთი პალტოს შეკერვა 150 ლარი უჯდება. თვეში საწარმო საშუალოდ 50 პალტოს კერავს. დაწერეთ ფუნქცია f: გასაყიდი ფასი → მოგება, თუ ცნობილია, რომ საწარმო სხვადასხვა სახის გადასახადებში 800 ლარს იხდის.

4 ნახაზის მიხედვით დაწერეთ ფუნქცია S=f(x), სადაც S მართკუთხედის ფართობია.



5 ABC სამკუთხედში MN||AC.
დაწერეთ MKN სამკუთხედის ფართობი, როგორც x-ის ფუნქცია, სადაც $x=S_{\Delta ABC}$.



6 ნებისმიერ x ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამოთ {x}, მისი წილადი ნაწილი. ({x}=x–[x]).
ა) არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?
ბ) დაწერეთ მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე.
გ) დახაზეთ აღნიშნული შესაბამისობის გრაფიკი.

7 ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეუსაბამეს მისი 5-ზე გაყოფით მიღებული r ნაშთი. იპოვეთ r, როცა n ტოლია 15; 27; 138; 1004. არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია? იპოვეთ განსაზღვრის არე; მნიშვნელობათა არე.

ბ

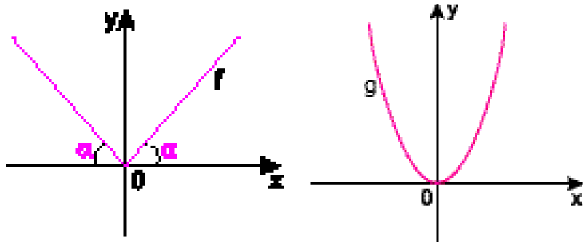
8 ABC სამკუთხედის AB, AC და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K, N და M წერტილები ისე, რომ AK:KB=2:3, AN:NC=4:5 და BM:MC=4:7. იპოვეთ $S_{\Delta AKN}$, $S_{\Delta BKM}$ და $S_{\Delta MNC}$, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია S.

9 გვაქვს 2 ათლიტრიანი ქილა 10% და 15%-იანი მარილმჟავას ხსნარით. მოცემულია აგრეთვე 3, 4 და 5 ლიტრიანი ქილები. გადასხმების შედეგად როგორ მივიღოთ 1 ლიტრი 12%-იანი ხსნარი?

10 E წერტილი ABC სამკუთხედის AD მედიანას ყოფს შეეფარდებით 1:4 (წვეროს მხრიდან). იპოვეთ BEC სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 40.

2. ლუწი და კენტი ფუნქცია

ნახაზზე მოცემულია f წირი, რომელიც სხივის მოძრაობის ტრაექტორიას აღწერს (სარკისებრ ზედაპირზე დაცემისას) და g წირი, რომელიც $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკია.
ა) რა აქვთ საერთო და რით განსხვავდებიან ეს გრაფიკები ერთმანეთისგან?
ბ) დაწერეთ f წირის განტოლება, თუ $\alpha=45°$.

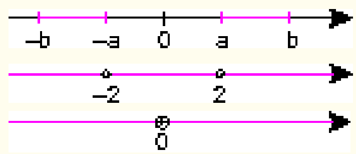


სარკისებრ ზედაპირზე სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია.

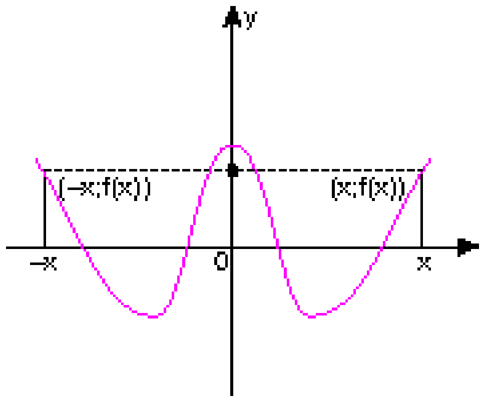
ფუნქციას, მის გრაფიკს ბევრი საინტერესო თვისება აქვს. გავეცნოთ ზოგიერთ მათგანს.
M რიცხვით სიმრავლეს ეწოდება **სიმეტრიული** ნულის მიმართ, თუ $\forall x \in M$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $-x \in M$. ე.ი. $(-a;a)$ შუალედი სიმეტრიულია ნულის მიმართ ნებისმიერი a-ს-თვის.

ჩამოთვლილი შუალედებიდან რომელია სიმეტრიული ნულის მიმართ?
ა) $[-5;5]$; ბ) $[-2;3]$; გ) $R\backslash\{0\}$; დ) $R\backslash\{2\}$; ე) $R\backslash\{-1;1\}$.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია 0-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x-თვის სრულდება: $f(-x)=f(x)$.

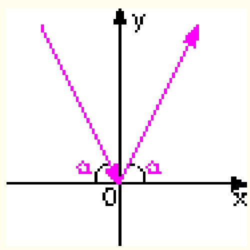


ნახაზზე მოცემული შუალედები (წითლად შეფერადებული) სიმეტრიულია ნულის მიმართ.



განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $(x;f(x))$ წერტილი მდებარეობს ლუწი ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $(-x;\ f(x))$-იც იმავე გრაფიკის წერტილია.

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

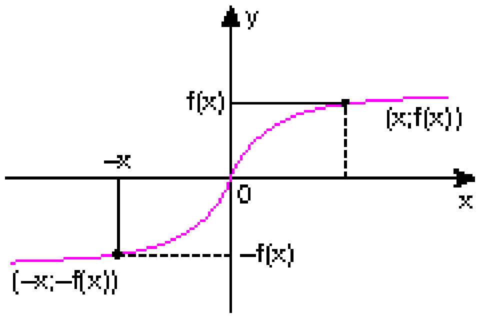


რადგან სარკისებრ ზედაპირზე სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია, ამიტომ სხივის მოძრაობის ტრაექტორია ლუწი ფუნქციით აღიწერება.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია 0-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x-თვის სრულდება: $f(-x)=-f(x)$.

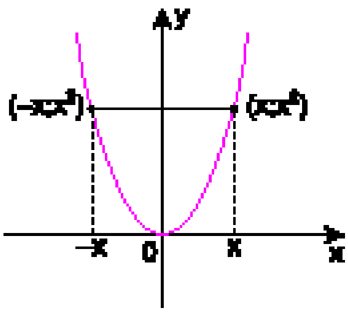
> **გასახსენებლად!**
>
> (a;b) და (–a;–b) წერტილები სიმეტრიული წერტილებია O(0;0) წერტილის მიმართ.
> (a;b) და (–a;b) წერტილები სიმეტრიული წერტილებია y ღერძის მიმართ.
>
> ვამბობთ, რომ y=f(x) ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის (y ღერძის) მიმართ, თუ განსაზღვრის არის ნებისმიერი a წერტილისათვის (–a;–f(a)) წერტილიც ((–a;f(a)) წერტილიც) იმავე გრაფიკის წერტილია.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ (x,f(x)) წერტილი მდებარეობს კენტი ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ (–x;–f(x)) წერტილიც იმავე გრაფიკის წერტილი იქნება.

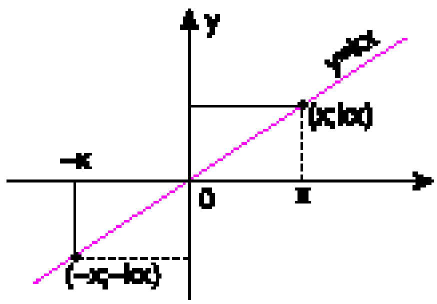


კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

აჩვენეთ (ანალიზურად), რომ ა) $y=x^2$ ლუწი ფუნქციაა; ბ) $y=kx$ კენტი ფუნქციაა.



$y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ



$y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია (0;0) წერტილის მიმართ

მაგალითი.

დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქცია:

ა) $f(x)=x^4+2x^2+5$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x^3+5x}{3x^2}$;

გ) $f(x)=2x^2+3x$;

დ) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.

ამოხსნა:

ა) $D(f)=(-\infty;\infty)$.

განვიხილოთ $f(-x)$.

$f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2+5=x^4+2x^2+5=f(x)$. ე.ი. ფუნქცია ლუწია.

ბ) $D(f)=R\backslash\{0\}$ – სიმეტრიულია ნულის მიმართ.

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+5(-x)}{3(-x)^2}=\frac{-x^3-5x}{3x^2}=-\frac{x^3+5x}{3x^2}=-f(x).$$

ე.ი. ფუნქცია კენტია.

გ) $D(f)=R$

$f(-x)=2(-x)^2+3(-x)=2x^2-3x$.

ე.ი. ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

დ) $D(f)=R\setminus\{1;2\}$.

რადგან განსაზღვრის არე არ არის სიმეტრიული 0-ის მიმართ, ამიტომ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1 $y=f(x)$ ფუნქცია ლუწია, თუ $\forall x\in D(f)$-თვის სრულდება __?__.

2 თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(5)=9$, მაშინ $f(-5)=$__?__.

3 ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია __?__ მიმართ.

4 კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია __?__ მიმართ.

5 თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(1)=7$, მაშინ $f(-1)=$__?__.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი:

1) y ღერძის მიმართ,

2) $O(0;0)$ წერტილის მიმართ, თუ:

ა) $A(-2;4)$; ბ) $A(5;-7)$; გ) $A(3;2)$; დ) $A(-1,5;-4)$.

2 ააგეთ AB, BC და AC მონაკვეთების სიმეტრიული მონაკვეთები

1) y ღერძის მიმართ; 2) $O(0;0)$ წერტილის მიმართ:

ა) $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(5;0)$; ბ) $A(1;-2)$, $B(3;-5)$, $C(4;2)$;

გ) $A(-2;3)$, $B(-3;5)$, $C(-1;-2)$; დ) $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(3;6)$.

3 ააგეთ AB მონაკვეთის სიმეტრიული AB_1 მონაკვეთები y ღერძის მიმართ, სადაც $A(o;b)$ $B(a;c)$ და აჩვენეთ, რომ $\angle BAO=\angle B_1AO$.

4 ააგეთ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული 1) y ღერძის მიმართ 2) O სათავის მიმართ, თუ $A(2;1)$ $B(-2;5)$ $C(-5;2)$ და აჩვენეთ, რომ მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის ტოლია.

5 დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქცია:

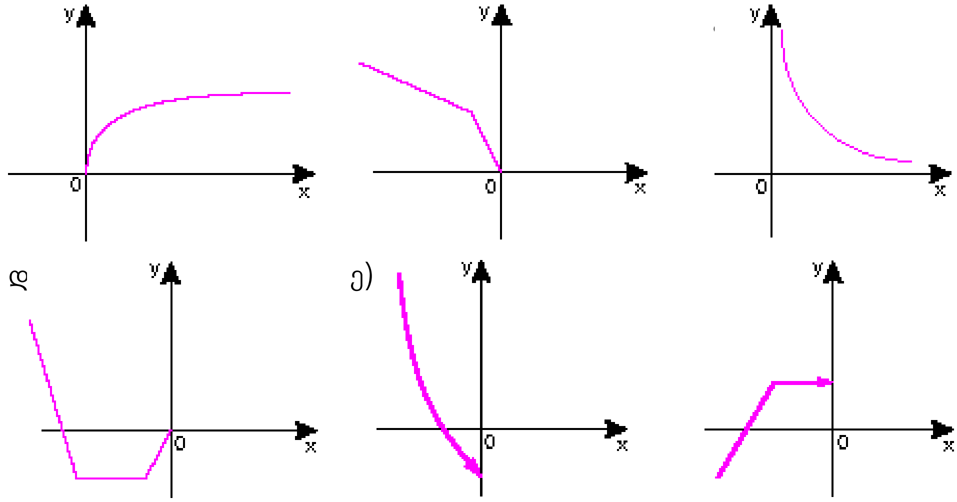
ა) $y=5x^2+1$; ბ) $y=4x^3$; გ) $y=x^3+3x$;

დ) $y=x(x+5x^3)$; ე) $y=x^5+3x-5$; ვ) $y=x^2+2x+5$;

ზ) $y=x|x|$; თ) $y=2|x-2|$; ი) $y=3x^2-2|x|-4$;

კ) $y=\dfrac{x}{3x^4+5}$; ლ) $y=\dfrac{5}{x}$; მ) $y=\dfrac{x^4}{2-x^2}$.

6 ნახაზზე მოცემულია R სიმრავლეზე განსაზღვრული y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი. შეავსეთ იგი მთელ განსაზღვრის არეზე, თუ ცნობილია, რომ:
1) y=f(x) ლუწი ფუნქციაა; 2) y=f(x) კენტი ფუნქციაა.



7 თუ f(0)=5. შესაძლებელია თუ არა, რომ f ფუნქცია იყოს კენტი?

8 რისი ტოლია f(0), თუ f კენტი ფუნქციაა და $0 \in D(f)$?

9 შესაძლებელია თუ არა y=kx+b ფუნქცია იყოს კენტი? ლუწი? (დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაადგინეთ რა შემთხვევაში?)

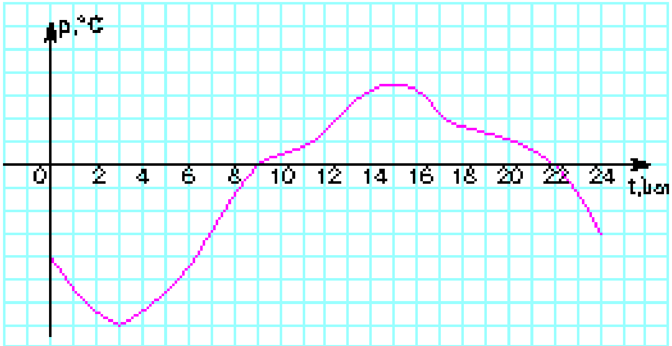
10 დაამტკიცეთ, რომ:
ა) ლუწ ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი, განაყოფი (თუ მნიშვნელი≠0) ლუწი ფუნქციაა;
ბ) კენტ ფუნქციათა ჯამი კენტი ფუნქციაა;
გ) კენტ ფუნქციათა ნამრავლი, განაყოფი (თუ მნიშვნელი≠0) ლუწი ფუნქციაა;
დ) კენტ და ლუწ ფუნქციათა ჯამი არც კენტია, არც ლუწი;
ე) კენტ და ლუწ ფუნქციათა ნამრავლი, განაყოფი კენტი ფუნქციაა.

გ

11 D წერტილი ძევს ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. როგორ შეეფარდება AD და DB მონაკვეთთა სიგრძები, თუ ACD სამკუთხედის ფართობი სამჯერ ნაკლებია ABC სამკუთხედის ფართობზე?

12 სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 3 სმ, 3 სმ და 1 სმ, წყვილ-წყვილად ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელთა წვეროებიც წრეწირთა შეხების წერტილებია.

3. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა



ნახაზზე მოცემულია გრაფიკი, რომელიც გვიჩვენებს ჰაერის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულებას.

ა) დროის რომელ შუალედში იკლებდა, მატულობდა ტემპერატურა?

ბ) დროის რომელ შუალედში ყინავდა, რომელ შუალედში იყო სითბო?

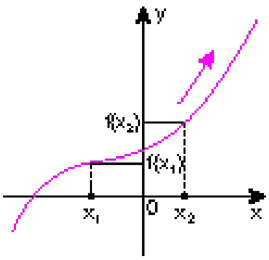
გ) იპოვეთ დღის განმავლობაში ყველაზე დაბალი და ყველაზე მაღალი ტემპერატურა;

დ) რომელ საათზე გაუტოლდა ტემპერატურა 0°C-ს?

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი განსაზღვრის არის რაიმე (a,b) შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x_1)<f(x_2)$.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი განსაზღვრის არის რაიმე (a,b) შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x_1)>f(x_2)$.

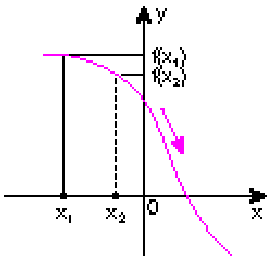
ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა. ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა.



$x_1<x_2$

$f(x_1)<f(x_2)$

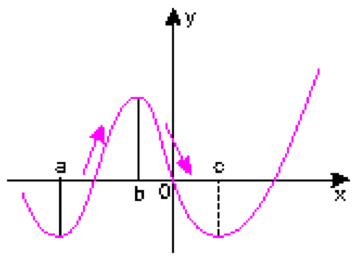
ფუნქცია ზრდადია



$x_1<x_2$

$f(x_1)>f(x_2)$

ფუნქცია კლებადია



$x\in[a;b]$ - ფუნქცია ზრდადია

$x\in[b;c]$ - ფუნქცია კლებადია

ზრდად და კლებად ფუნქციებს **მონოტონური ფუნქციები** ეწოდება.

მოიყვანეთ ზრდადი, კლებადი ფუნქციის მაგალითები თქვენთვის ცნობილი ფუნქციებიდან.

დახაზეთ $y=x^2$ ფუნქცია. რომელ შუალედშია იგი ზრდადი? კლებადი?