

ნანა ჯაფარიძე • მაია წილოსანი • ნანი წულაია

მათემატიკა

მოსწავლის წიგნი

11

გრიფი მიენიჭა ს.ს.ი.პ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ
(ბრძანება N 375, 18.05.2012).



გაკურსულაკაურის
გამომცემლობა

სარჩევი

I თავი	7
1 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები	8
2 დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.....	18
3 ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და იგივეობათა დამტკიცება	21
4 ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	24
5 ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	28
6 დაყვანის ფორმულები.....	31
7 ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება	35
8 $y = a \sin(bx+c)$ ფუნქცია	39
I თავის დამატებითი სავარჯიშოები	45
I თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	48
II თავი	49
1 წრფეთა პარალელურობის ნიშანი.....	50
2 წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა	53
3 სიბრტყეთა პარალელურობა	56
4 ამოცანები კვეთების აგებაზე.....	60
II თავის დამატებითი სავარჯიშოები	67
II თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	69
III თავი	71
1 ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით	72
2 მაჩვენებლიანი ფუნქცია	76
3 ლოგარითმი	82
ეს საინტერესოა.....	86
4 ლოგარითმის თვისებები	87
5 შექცეული ფუნქცია	91
6 ლოგარითმული ფუნქცია	96
7 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები	99
1. მაჩვენებლიანი განტოლება	99
2. ლოგარითმული განტოლება.....	102
8 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები	105
9 ნახევრადლოგორითმული ბადე.....	111
შეამოწმე შენი ცოდნა:	116
III თავის დამატებითი სავარჯიშოები	117
III თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	120

IV თავი	121
1 ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება	122
თემა: სივრცული ფიგურის გამოსახულება	125
2 კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა	127
3 წრფისა და სიბრტყის მართობულობა	130
4 წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი	132
5 პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი	136
5 სამი მართობის თეორემა	139
7 კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის	141
8 ორნახნაგა კუთხე	145
9 მართობული სიბრტყეები. სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი	150
IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები:	153
შეამოწმე შენი ცოდნა:	157
IV თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	158

V თავი	159
1 მიმდევრობა	160
2 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი	163
3 მიმდევრობის ზღვარი	170
ეს საინტერესოა	175
4 ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ	176
5 უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია	180
V თავის დამატებითი სავარჯიშოები:	183
შეამოწმე შენი ცოდნა:	185
V თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	186

VI თავი	187
1 ვექტორის კოორდინატები	188
2 ვექტორების შეკრება–გამოკლება	191
3 ვექტორის გამრავლება რიცხვზე, კოლინეარული ვექტორები	194
4 ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი	196
5 ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი	199
6 კონუსი	202
7 სფერო, ბირთვი	205
შეამოწმე შენი ცოდნა:	208
VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები:	210
VI თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა	213

VII თავი	215
კომბინატორიკის ელემენტები.....	216
1 კომბინატორული ამოცანები.....	216
2 გადანაცვლება, წყობა.....	220
3 ჯუფთება.....	224
4 წყობა განმეორებით.....	229
5 ამოვსხნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან.....	232
6 გეომეტრიული ალბათობა.....	235
7 დაგროვილი სიხშირე. რანგი.....	238
8 ოგევა.....	242
9 ცენტრალური ტენდენციის საზომები.....	246
VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები:.....	249
შეამოწმე შენი ცოდნა:.....	251
VII თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა.....	250
 პასუხები:	 253

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა. ყოველ პარაგრაფში შეხვედებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:



- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;



- წყვილებში სამუშაო;

*

- შედარებით რთული ამოცანა;



- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;



- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს, ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს, ათობითი ლოგარითმების და ტრიგონომეტრიული ფუნქციათა მნიშვნელობების ცხრილებს.

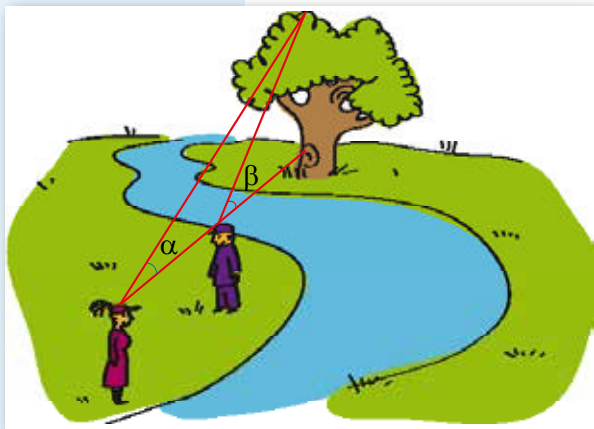
გისურვებთ წარმატებებს!

I თავი

ამ თავში თქვენ გაეცნობით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მათ თვისებებსა და გრაფიკებს. დამოკიდებულებებს ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ისწავლით ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებას და იგივეობათა დამტკიცებას. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას.

1 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები

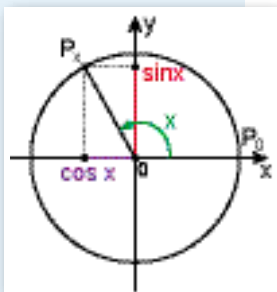


თქვენთვის უკვე ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები. გავიხსენოთ.



რას ეწოდება ტრიგონომეტრიული წრენირი?

თუ P_x წერტილი მიიღება $P_0(1; 0)$ წერტილის O წერტილის მიმართ X რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით, მაშინ ვიცით, რომ მიღებული P_x

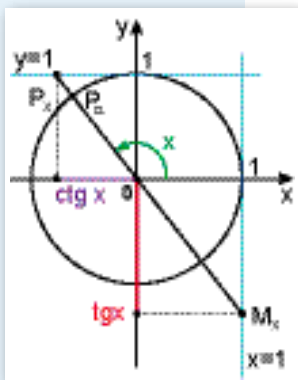


წერტილის ორდინატას X კუთხის **სინუსს**, აბსცისას კი X კუთხის **კოსინუსს** უწოდებენ. ხოლო OP_x წრფისა და $x=1$ (ტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა X კუთხის **ტანგენსია**, OP_x წრფისა და $y=1$ (კოტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა კი - X კუთხის **კოტანგენსი**.

შესაბამისად,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \sin x, & y &= \sin x \\ x &\rightarrow \cos x, & y &= \cos x \\ x &\rightarrow \operatorname{tg} x, & y &= \operatorname{tg} x \\ x &\rightarrow \operatorname{ctg} x, & y &= \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია.



ქვემოთ მოცემულია ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

ჩამოვყალიბოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები.

1. $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციათა თვისებები

$y = \sin x$ ფუნქცია

1. $D(\sin)=\mathbb{R}$

2. $E(\sin) = [-1; 1]$

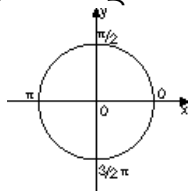
3. $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(-x) = -\sin x$

ფუნქცია კენტია - გრაფიკი სიმეტრიულია $O(0,0)$ ნერტილის მიმართ.

4. $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x+2\pi)=\sin x, n \in \mathbb{Z}$

ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
 $x \in (2\pi n; \pi+2\pi n), n \in \mathbb{Z}, \sin x > 0$ და
 $x \in (\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n), n \in \mathbb{Z}, \sin x < 0$



6. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.

$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.

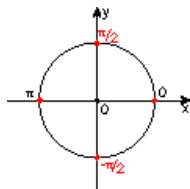
7. ფუნქციის ნულებია:
 $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

8. სინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ხოლო უმცირესს, როცა:

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



$y = \cos x$ ფუნქცია

1. $D(\cos)=\mathbb{R}$

2. $E(\cos) = [-1; 1]$

3. $\forall x \in \mathbb{R}: \cos(-x) = \cos x$

ფუნქცია ლუნია - გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

4. $\forall x \in \mathbb{R}: \cos(x+2\pi)=\cos x, n \in \mathbb{Z}$

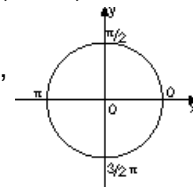
ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$.

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:

$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \cos x > 0$

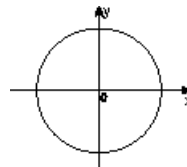
და $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \cos x < 0$

$n \in \mathbb{Z}, \cos x < 0$



6. $x \in (2\pi n; \pi+2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.



$x \in (\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.

7. ფუნქციის ნოლებია:

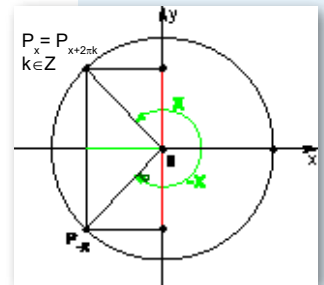
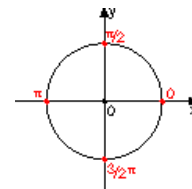
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

8. კოსინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ხოლო უმცირესს, როცა:

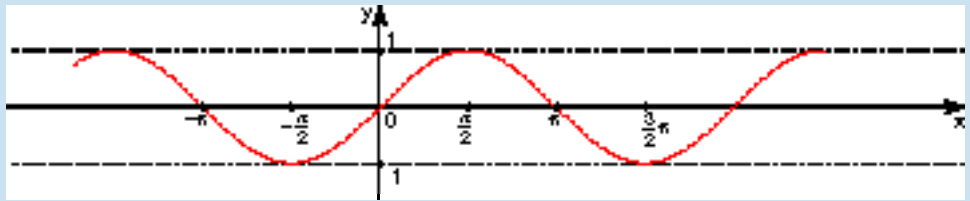
$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



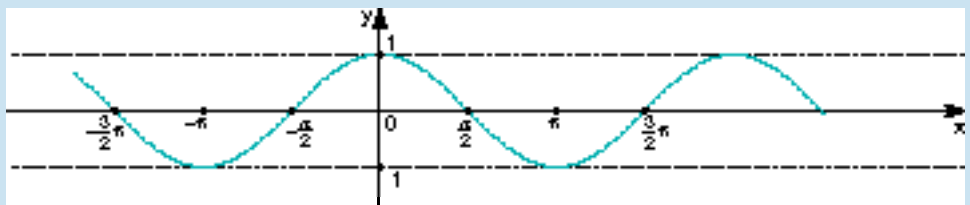


ტრიგონომეტრიული წრენირის გამოყენებით დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისებები.

$y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი — სინუსოიდა.



$y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი — კოსინუსოიდა.



მაგალითი 1.

რომელი მეოთხედის კუთხეა 9 რადიანი?
ამოხსნა:

$\pi \approx 3,14$ $3\pi > 9$,
 $\frac{5}{2}\pi \approx 7,85$. ე.ი. 9 რადიანი მე-2 მეოთხედის კუთხეა.

მაგალითი 2.

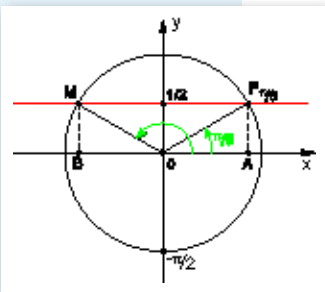
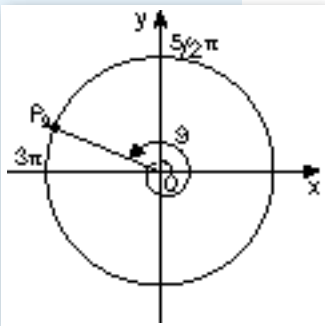
ტრიგონომეტრიული წრენირის საშუალებით იპოვეთ ყველა ის α კუთხე, რომელიც მოთავსებულია $[-4\pi; 4\pi]$ შუალედში და რომელთათვისაც სრულდება $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

ამოხსნა:

გავატაროთ $y = \frac{1}{2}$ წრფე. იგი წრენირს ორ წერტილში გადაკვეთს.

როგორც ცნობილია, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ე.ი. ერთ-ერთი ამ კუთხეთაგანი არის $\frac{\pi}{6}$. $\triangle OMB = \triangle OP_6A \Rightarrow \angle BOM = \angle OP_6A \Rightarrow \angle AOM = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

სინუსის პერიოდულობის გათვალისწინებით საძიებელი კუთხეები იქნებიან: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23}{6}\pi$, ასევე $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{17}{6}\pi$; $-\frac{7}{6}\pi$; $-\frac{19}{6}\pi$.



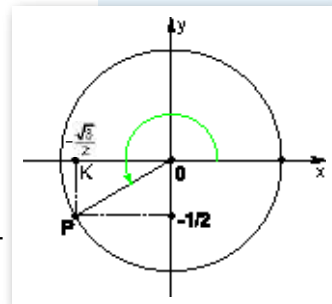
მაგალითი 3.

იპოვეთ ყველა ის რიცხვი, რომლის შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ წერტილი.

ამოხსნა:

ცხადია, P წერტილი ნამდვილად ტრიგონომეტრიული წრეწირის წერტილია, რადგან $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. ΔPOK -ში $PK = \frac{1}{2}$; $OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $OP = 1$.

$\sin \angle KOP = \frac{1}{2}$, $\angle KOP = \frac{\pi}{6}$. ე.ი. P არის ყველა $\frac{7}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ რიცხვების და მხოლოდ მათი შესაბამისი წერტილი.



მაგალითი 4.

იპოვეთ $f(x) = \sin 3x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ T_0 არის $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მაშინ უნდა შესრულდეს $f(x) = f(x + T_0)$.

$f(x + T_0) = \sin(3(x + T_0)) = \sin(3x + 3T_0)$ მივიღეთ:

$\sin 3x = \sin(3x + 3T_0)$, რადგან $T_0(\sin) = 2\pi$, ე.ი. $3T_0 = 2\pi \Rightarrow T_0 = \frac{2}{3}\pi$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. თუ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, მაშინ α კუთხე ___ მეოთხედის კუთხეა.
2. თუ α არის II მეოთხედის კუთხე, მაშინ ___ $< \alpha <$ ___.
3. თუ $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, მაშინ α კუთხე ___ ან ___ მეოთხედის კუთხეა.
4. ჩასვით უტოლობის ნიშანი ისე, რომ გამოვიდეს ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა.

ა) $\cos \frac{r}{13} \text{ ? } \cos^2 \frac{r}{13}$;

ბ) $\sin \frac{r}{8} \text{ ? } \sin^2 \frac{r}{8}$;

გ) $\sin \frac{r}{9} \text{ ? } \sin \frac{r}{9} \cos \frac{r}{7}$;

დ) $\cos \frac{18r}{15} \text{ ? } \cos \frac{18r}{5} \sin \frac{11r}{3}$.

სავარჯიშოები:

- 1 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე წერტილის კოორდინატები, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha =$
 ა) 3π ; ბ) $\frac{3r}{2}$; გ) -270° ; დ) 1080° ; ე) -90° ; ვ) $-\frac{r}{4}$.

2 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე $P\alpha$ წერტილის კოორდინატები, თუ $OP\alpha$ სხივი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, სადაც α ტოლია:

- ა) $\frac{2r}{3}$; ბ) $\frac{3r}{4}$; გ) $\frac{5r}{6}$; დ) π ; ე) $\frac{7r}{6}$; ვ) $\frac{3r}{2}$;
 ზ) $\frac{7r}{4}$; თ) $\frac{11r}{6}$; ი) $\frac{r}{3}$; კ) $-\frac{3r}{4}$; ლ) $-\pi$; მ) $-\frac{r}{2}$.

3 იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა, თუ

- ა) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ და $-90^\circ < x < 90^\circ$;
 ბ) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $90^\circ < x < 270^\circ$;
 გ) $\cos x = -\frac{1}{2}$ და $360^\circ < x < 540^\circ$;
 დ) $\sin x = -\frac{1}{2}$ და $-270^\circ < x < 90^\circ$.

4 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

- ა) $\frac{\cos\left(\frac{3r}{2}\right) - \sin\left(\frac{3r}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{r}{6}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{r}{4}\right) + \cos\left(-r\right) - \sin\left(\frac{r}{4}\right)}$;
 ბ) $\frac{\sin\left(\frac{5r}{2}\right) - \cos\left(-\frac{r}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{r}{3}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3r}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{2r}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{r}{6}\right)}$;
 გ) $2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{r}{4}\right) + 3 \sin\left(-\frac{r}{3}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{r}{4}\right)$;
 დ) $-4 \cos^2\left(-\frac{r}{4}\right) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{r}{6}\right) - 2 \sin^2\left(-\frac{r}{3}\right) + \cos\left(-\frac{r}{6}\right)$.

5 დაადგინეთ ლუნია თუ კენტი მოცემული ფუნქცია

- ა) $y = \sin 5x + \sin 3x + \sin x \cos 2x$; ბ) $y = \cos 4x + \sin^3 \frac{x}{2} \sin x + 5x^2$;
 გ) $y = \sin |x| \cdot \cos 2x$; დ) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x + \sin x \cos 4x$.

6 დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი

- ა) $y = 2 \sin x$; ბ) $y = \sin 2x$; გ) $y = \frac{\cos x}{2}$; დ) $y = \sin^2 x$;
 ე) $y = \cos 3x$; ვ) $y = \sin x + \cos 2x$; ზ) $y = |\cos 2x|$; თ) $\sin \frac{x}{4}$.

7 ერთეულოვან წრეწირზე ორი $A(0;1)$ და $B(1;0)$ წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას ერთი და იმავე მიმართულებით. A წერტილი წუთში შემოწერს 60° -იან რკალს, ხოლო B წერტილი — 42° -იანს. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი:

- ა) პირველი შეხვედრა? ბ) მეორე შეხვედრა? გ) k -ური შეხვედრა?

- 8 ერთეულოვანწრეწირზეორი $A(0;1)$ და $B(1;0)$ წერტილი ერთდროულად ინყებს მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით. A წერტილი მოძრაობს უარყოფითი მიმართულებით და ყოველ წუთში შემოწერს 20° -იან რკალს, ხოლო B წერტილი დადებითი მიმართულებით და ყოველ წუთში მის მიერ გავლილი რკალის გრადუსული ზომა 25° -ია. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი:
 ა) პირველი შეხვედრა? ბ) მეორე შეხვედრა? გ) k -ური შეხვედრა?

9* აჩვენეთ, რომ თუ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, მაშინ $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

- 10 ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:
 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

- 11 იპოვეთ x -ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(g(x))=0$, თუ $f(x)=x^2-5x-6$ და $g(x)=x^2$.

- 12 იპოვეთ $\sqrt{(3-a)(5+a)}$, თუ $\sqrt{3-a} + \sqrt{5+a} = 4$.

- 13 ამოხსენით სისტემა (მით.: გამოიყენეთ იგივეობა $[x] + \{x\} = x$).

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 2,3 \\ [y] + \{x\} = 1,2 \end{cases}$$

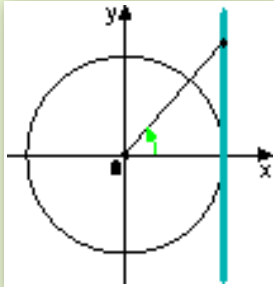
- 14 a -ს რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)=(a-2)x+3a-4$ ფუნქცია
 ა) ლუწი; ბ) კენტი.

- 15 a -ს რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)=(a+3)x+5a$ ფუნქცია პერიოდული?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

- 16 იპოვეთ ა) $y=\sin kx$; ბ) $y=\cos kx$ ფუნქციის პერიოდი, უმცირესი დადებითი პერიოდი.

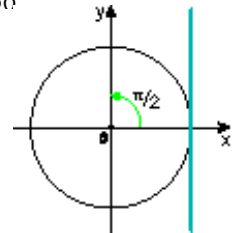
2 $y=\operatorname{tg}x$ და $y=\operatorname{ctg}x$ ფუნქციათა თვისებები



1. ააგეთ კუთხე, რომლის ტანგენსი (კოტანგენსი) ტოლია:
ა) 1-ის, ბ) 2-ის, გ) 3-ის.

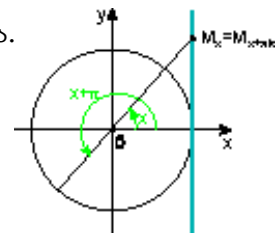
ჩამოვყალიბოთ $y=\operatorname{tg}x$ ფუნქციის ძირითადი თვისებები

1. ტანგენსის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ სახის რიცხვებისა.

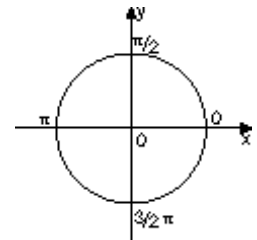


2. $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$

3. $\forall x \in D(\operatorname{tg})$ -თვის $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$, ე.ი. ფუნქცია კენტია.



4. $\forall x \in D(\operatorname{tg})$ -თვის $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x, k \in \mathbb{Z}$
ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π .

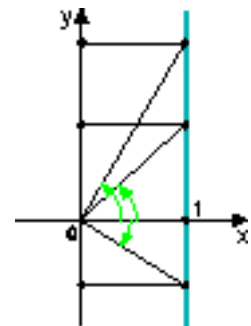


5. ტანგენსის ნიშანმუდმივობის შუალედები:
 $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$ შუალედებში $\operatorname{tg}x > 0$ და
 $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$ შუალედებში $\operatorname{tg}x < 0$.

6. $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$ შუალედებში $y = \operatorname{tg}x$ ფუნქცია ზრდადია.

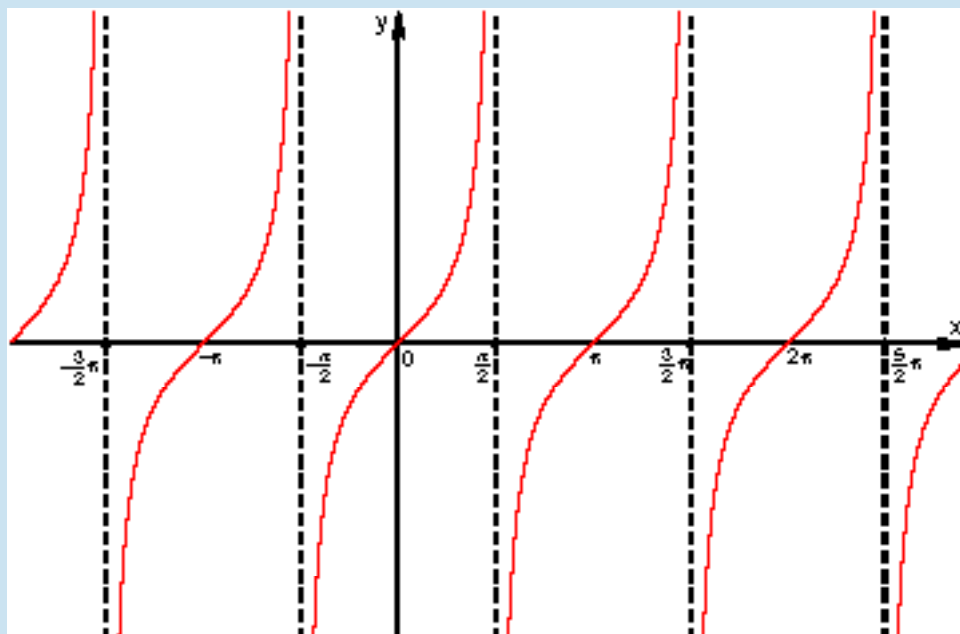


- აჩვენეთ, რომ როცა x უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$ -ს და $x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}x$ -ის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება - ხდება რაგინდ დიდი მაგრამ როცა x უახლოვდება $-\frac{\pi}{2}$ -ს და $x > -\frac{\pi}{2}$, მაშინ $|\operatorname{tg}x|$ -ის მნიშვნელობები აბსოლუტური სიდიდით ისევე უსაზღვროდ იზრდება.

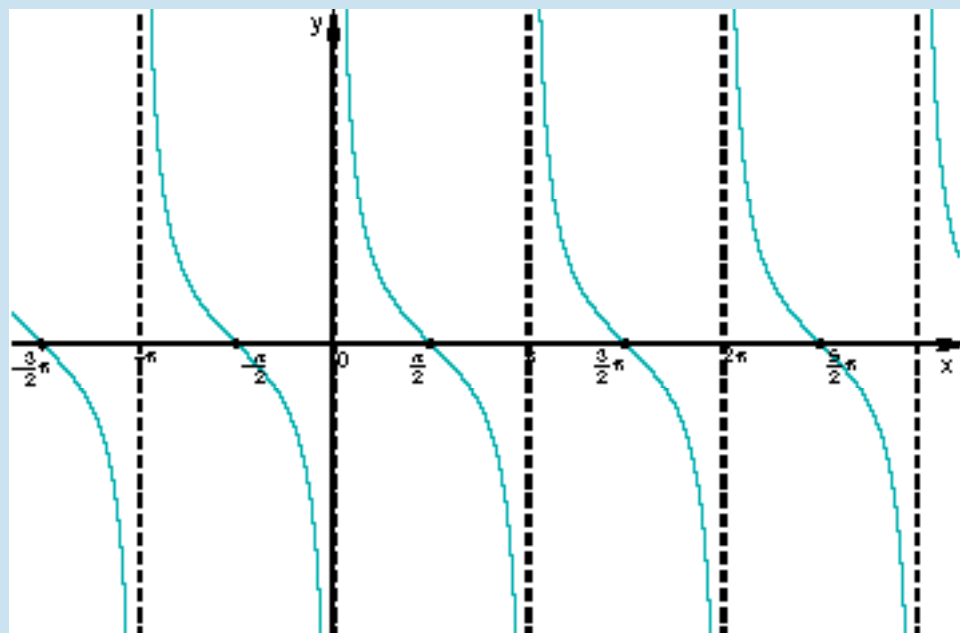


7. ტანგენსის ნულებია: თუ $\operatorname{tg}x = 0$, მაშინ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$y=\operatorname{tg}x$ ფუნქციის გრაფიკი - ტანგენსოიდა



$y=\operatorname{ctg}x$ ფუნქციის გრაფიკი - კოტანგენსოიდა



- ა) დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) $y=\operatorname{tg}x$ ფუნქციის თვისებები;
- ბ) ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ $y=\operatorname{ctg}x$ ფუნქციის თვისებები.

